

# A vasúti kerék mozgásegyenleteiről és stabilitásáról

## On the equations of motion and the stability of the railway wheelset

FINTA ERVIN,

tanszéki mérnök, E-mail: finta.ervin@sze.hu,

Széchenyi István Egyetem, Gépészmérnöki, Informatikai és Villamosmérnöki Kar,

Alkalmazott Mechanika Tanszék, 9026 Győr, Egyetem tér 1.



A vasúti kerékpár kialakításával és mozgásával kapcsolatos vizsgálatok közel másfél évszázados múltra tekintenek vissza, és napjainkban is jelentős számú az ezzel kapcsolatos új eredmény. A szakirodalomban általános gyakorlatnak számít, hogy a vasúti kerékpárt – a merev test modellből vártnál kevesebb – két szabadságfokú rendszerként írják le, azonban ennek kimerítő magyarázata hiányzik az irodalomból. A tanulmányban a vasúti kerékpár mozgásegyenleteinek felírásából megmutatjuk, hogy lineáris esetben bizonyos egyenletek miért nem befolyásolják a rezgéseket, és milyen módon magyarázzák a két szabadságfokú modell használatát.

A rezgő kerékpár többnyire egy meghatározott, kritikus sebesség elérésekor válik instabillá, amely sebesség függ a kerék, valamint a jármű paramétereitől. Célunk megmutatni, hogy milyen paraméterek változtatásával lehetséges növelni a kritikus sebességet, hogy a stabilitásvesztés ne következzen be a jármű üzeme alatt. A tanulmányban vizsgáljuk a kerék kúposságának és a rugalmas felfüggesztés merevségének hatását.

**Kulcsszavak:** vasúti kerék, kigyózó mozgás, stabilitás

*Studies on the geometry and motion of railway wheelsets go back nearly a century and a half, and there are still a significant number of new findings. It is common practice to describe the railway wheelset as a two degree of freedom system, less than expected from the rigid body model, but an exhaustive explanation of this is lacking in the literature. In this paper, we form the equations of motion of the railway wheelset and show why certain equations do not affect the vibrations in the linear case and how the use of the two degree of freedom model can be explained.*

*A vibrating wheelset usually becomes unstable when a certain critical speed is reached, which speed depends on the parameters of the wheel and the vehicle. Our aim is to show how the critical speed can be increased by varying the parameters so that the loss of stability does not occur during the vehicle's operation. In this paper we investigate the effect of the conicity of the wheels and stiffness of the suspension.*

**Keywords:** railway wheelset, hunting motion, stability

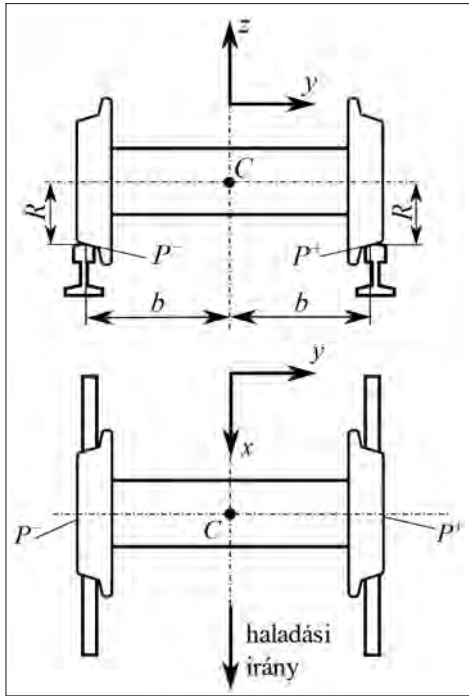
### 1. A vasúti kerék jellemzése

A vasúti járművek gördülését tengellyel mereven összekapcsolt kerekek, úgynevezett kerékpárok biztosítják (1. ábra). A szerelvények pályán maradása a kerekek enyhén kúpos kialakításából adódóan lehetséges, azonban ezzel együtt jellegzetes rezgések lépnek fel bizonyos határsebesség, kritikus sebesség elérésekor. A kerékpár mozgásának megértéséhez szükséges mértékben sorra vesszük a vasúti kerékpár néhány jellegzetességét a szakirodalom segítségével. A téma egyes részeiről áttekintést adnak az [1–4] források, azonban ezekben az irodalmakban nem talál-

ható az alábbi formában lévő összefoglalás. Az egyes részleteknél az oda vonatkozó forrásokat külön jelezzük. A tanulmány összefoglaló jellegű, a részletes levezetések a szerző [5] munkájában olvashatók.

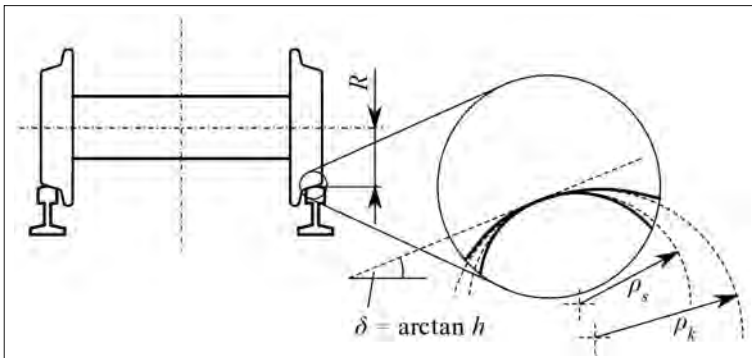
#### 1.1. A kúposság és következményei

A vasúti kerékpár modellje az 1. ábrán látható elől- és hátrészletben, illetve felülnézetben. Koordináta-rendszerként Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert használunk, amelynek  $x$  tengelye a vasúti szerelvény haladási irányában, az  $y$  tengelye a sínekre merőlegesen, a haladási irányból nézve balra, a  $z$  tengely pedig felfelé mutat.

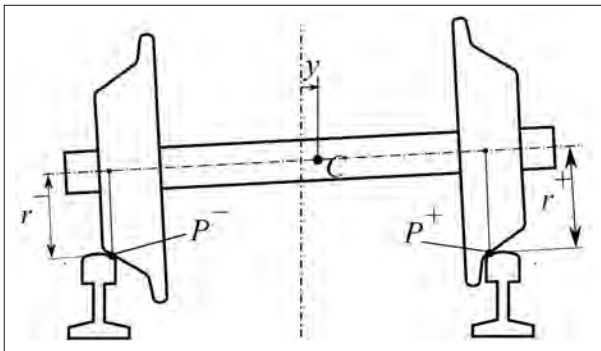


1. ábra. A vasúti kerékpár modellje elől- és felülnézetben

$P^-$  és  $P^+$  a két kerék érintkezési pontját jelöli a sínkel úgy, hogy az  $y < 0$  helyen lévő kerékre  $P^-$ , az  $y > 0$  helyen lévő kerékre pedig  $P^+$  vonatkozik. A továbbiakban a mennyiségek felső indexébe tett „-” jelölés mindig az  $y < 0$  oldali, a „+” jelölés pedig mindig az  $y > 0$  oldali kerékre vonatkozik. Az ábrán  $C$  jelöli a kerékpár geometriai középpontját. A továbbiakban az



2. ábra. A kerék és a sín görbületi sugarai [1]



3. ábra. A vasúti kerékpár a centrális helyzetből való elmozdulása esetén [1]

$y$ -nal jelölt elmozdulás alatt a  $C$  pont  $y$  tengely irányába történő elmozdulását értjük.  $R$  a kerekek görbülőkörének névleges sugarát jelenti (más néven a futókör sugarát). A  $P^-$  és  $P^+$  pontok, azaz az érintkezési pontok távolságát nevezzük a futókörtávolságnak, ezt  $2b$ -nek vesszük.

A 2. ábrán a görbült kerékprofil szemléltetjük,  $\rho_s$  a sín,  $\rho_k$  a kerék görbületi sugarát jelöli, a  $h$  névleges kúposág a  $\delta$  kúpszög tangense, amely tisztán kúpos kerékprofil esetén megfelelő leírást ad. A  $h$  tényező értéke a szakirodalom alapján 0,05–0,1 közötti, azonban nagy sebességű járműveknél ez az érték 0,02–0,025 között mozog [6]. A tapasztalatok alapján görbült kerékprofil esetén a kúposágot a kerék, illetve a sín görbületi sugarának függvényében a

$$h^* = h \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_k - \rho_s}} \quad (1)$$

összefüggés szerint tudjuk leírni, ahol  $h^*$  az úgynevezett egyenértékű kúposág [7]. Látszik a képletből, hogy ha a sín görbületi sugara elhanyagolható a kerékéhez képest, akkor az egyenértékű kúposág a névleges kúposághoz közelít. A kopással azonban a görbületek változása miatt az egyenértékű kúposág jelentősen eltérhet a névlegestől.

Fontos kiemelni, hogy a  $b$  és  $R$  mennyiségek a kerékpár úgynevezett centrális helyzetét jellemzik, amikor nem lép fel keresztirányú elmozdulás. Ebben az esetben mindkét kerék sugara megegyezik a névleges sugárral. Keresztirányú elmozdulás esetén a kerekek sínrel érintkező sugarai eltérnek egymástól, és ez az, ami segít pályán tartani a vasúti szerelvényt. A kerék centrális helyzetből történő elmozdulását a 3. ábrán szemléltetjük. Látható, hogy a  $P^-$  pontnál  $r^-$ , a  $P^+$  pontnál pedig  $r^+$  lett a két kerék tényleges futókör sugarai.

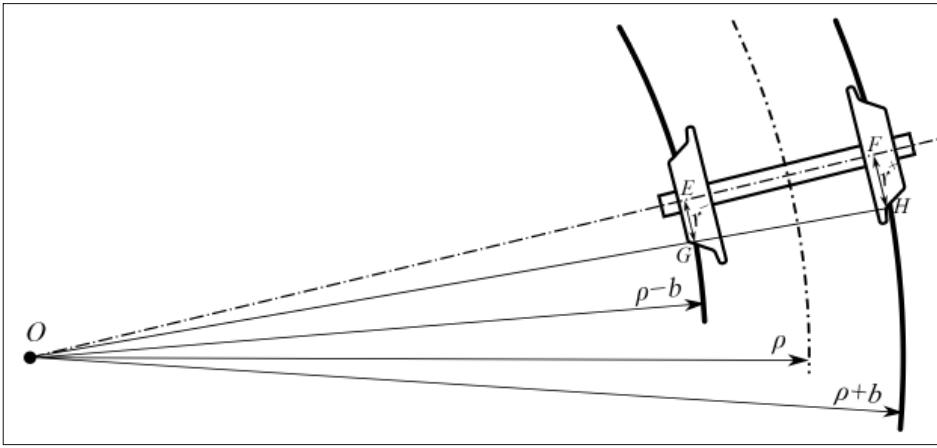
Ezeket a mennyiségeket leírhatjuk az

$$\begin{aligned} r^- &= \tilde{r}(-y) = R - h^* y + \mathcal{O}^2(y), \\ r^+ &= \tilde{r}(y) = R + h^* y + \mathcal{O}^2(y) \end{aligned} \quad (2)$$

összefüggésekkel, ahol  $\mathcal{O}^2(y)$  a másodfokú, illetve másodfokúnál nagyobb fokszámú,  $y$ -tól függő tagokat jelöli. Az  $\tilde{r}(y)$  függvény a kerék- és sínprofil geometriájából határozható meg analitikusan, numerikusan, vagy méréssel. A függvény  $y = 0$  körüli Taylor-sorában a lineáris együttható éppen a  $h^*$  egyenértékű kúposág [2]. A két futókör sugárkülönbségét a

$$\Delta r = r^- - r^+ = -2h^* y + \mathcal{O}^3(y) \quad (3)$$

módon definiáljuk. A (2) egyenletekből látszik, hogy a páros hatványú tagok megegyező, míg a páratlan hatványúak ellentétes előjelűek. Ezért kivonásnál a



4. ábra. A vasúti kerékpár kanyarodása

páros hatványú tagok kiesnek, a páratlan hatványúak megmaradnak, így nem szerepel a (3) összefüggésben másodfokú tag.

A 4. ábrán a vasúti kerékpár látható kanyarodás közben  $\rho$  görbületi sugarú pályán. A jellegzetes pontokat bejelölve látható, hogy az  $OGE$  háromszög hasonló az  $OHF$  háromszöghöz.

A hasonlóság miatt felírható a

$$\frac{\rho+b}{r^+} = \frac{\rho-b}{r^-}$$

aránypár, amelyet átrendezve az

$$(r^- + r^+)b = (r^+ - r^-)\rho$$

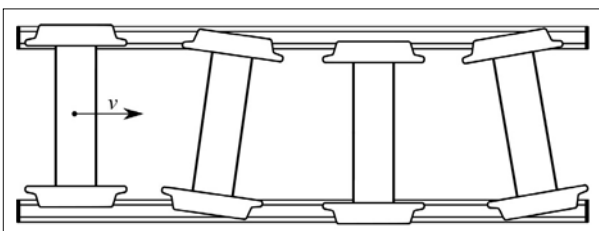
egyenletre jutunk. A (2) összefüggésekből adódóan a két sugár összegét  $2R$ -rel közelítjük, hiszen az  $\mathcal{O}^2(y)$  tagok legalább másodrendben kicsinyek  $R$ -hez képest. A (3) egyenletet felhasználva és a  $\kappa = 1/\rho$  görbületet bevezetve az  $y$  irányú kitérésre az

$$y = Rb\kappa/h^* \quad (4)$$

összefüggést kapjuk. Ez azt jelenti, hogy minél nagyobb a pálya görbülete, annál nagyobb keresztirányú kitérés várható, vagy másképp: adott maximális  $y$  elmozdulás ismeretében megadható, hogy mekkora az a legkisebb görbületi sugarú pálya, amely szükséges a kanyarodáshoz.

### 1.2. Kinematikai rezgések

A vasúti kerékpár jellegzetes kigyózó mozgását az 5. ábra szemlélteti. Más szóhasználattal ezt a jelen-



5. ábra. A vasúti kerékpár kigyózó mozgása [1]

séget szinuszfutásnak is nevezik, mivel a kigyózó mozgással bejárt út szinuszfüggvénnyel közelíthető. Az ábrán az az eset szerepel, amikor a vasúti jármű egyenletes  $v$  sebességgel halad a sínen, és az érintkezés a kerék és a sín között tiszta gördülésnek tekinthető.

Ekkor a centrális helyzettől való periodikus eltéréseket kinematikai rezgésnek nevezük.

Az elnevezés – mint azt később látni fogjuk – onnan ered, hogy tiszta gördülés feltételezésével pusztán a kinematikai összefüggések segítségével egyértelműen leírható a mozgás. Ehhez két változót használunk, az  $y$  tengely irányú elmozdulást, valamint a  $z$  tengely körüli elfordulást, amelyet  $\psi$ -vel jelölünk.

Kis elmozdulások és elfordulások esetén érvényes az

$$\dot{y} = v\psi \quad (5)$$

összefüggés. Emellett Klingel [8] már korán megállapította a kerekek kúposágára vonatkozó számításai alapján, hogy a  $\psi$  időbeli megváltozása

$$\dot{\psi} = v \frac{\Delta r}{2bR} = v \frac{-hy}{bR}. \quad (6)$$

Ennek érvényességéhez a fentiek mellett azt is feltételeznünk kell, hogy a kúposág értéke kicsi. A Klingel-féle összefüggésekből felírható a kinematikai rezgést leíró

$$\ddot{y} + \omega_{\text{Kli}}^2 y = 0 \quad (7)$$

differenciálegyenlet [3], ahol

$$\omega_{\text{Kli}} = v \sqrt{\frac{h}{bR}}$$

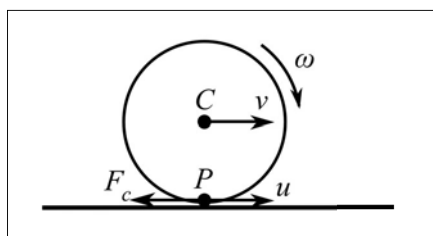
a Klingel-féle sajátkörfrekvencia. A (7) differenciálegyenlet megoldása  $y(t) = A \sin(\omega_{\text{Kli}} t)$  alakú, ahol  $A$  a rezgés amplitúdója. Így ez egy állandó amplitúdójú, csillapítatlan rezgés, a centrális helyzet a stabilitás határán van. A szakirodalom nem ad magyarázatot arra, hogy a kerékrezgés jellemzéséhez miért elegendő az (5) és (6) egyenletekkel leírható két szabadságfokú modell használata.

### 1.3. Kúszás

A vasúti kerék bonyolult alakú, térbeli test, ezért a modellalkotás szempontjából ebben az alfejezetben a kereket egy koronggal helyettesítjük, s így a korong

síkon történő mozgását vizsgáljuk. Ha a korong tisztán gördülne, akkor sebessége  $v = \omega R$  szerint alakulna, ahol  $\omega$  a korong szögsebessége,  $R$  a sugara. Tapasztalati úton viszont már Reynolds [9] vizsgálta fémhenger gumiasztalon történő mozgását, ahol a henger súly alatti deformációja miatt nem csupán egy pontban érintkezik az asztal síkjával.

A megfigyelés az volt, hogy a henger mozgása hasonlít a csúszáshoz, a sebesség pedig a  $v = \omega R + u$  összefüggéssel adható meg, ahol  $v$  a henger geometriai középpontjának sebessége,  $u$  a kúszási sebesség (6. ábra). A kúszás jelenségét tehát az érintkező testek deformációja okozza a  $P$  érintkezési pont környezetében. Fémtestek esetén csupán a lokális, azaz a  $P$  pont kis környezetében fellépő deformáció jelentős. Emiatt használhatjuk a merev test modellt azzal, hogy a kúszás hatását az érintkezési pont látszólagos csúszásával, a kúszási sebességgel vesszük figyelembe.

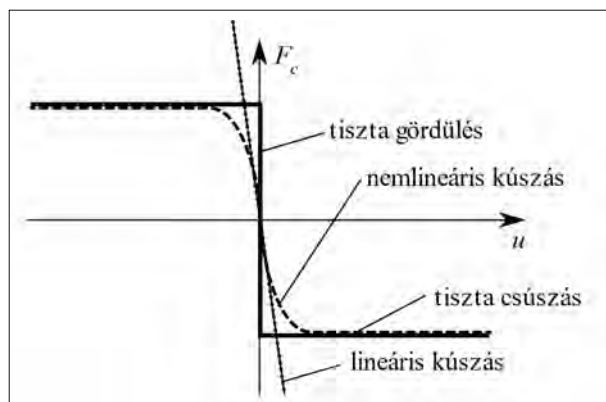


6. ábra. A kúszási sebesség értelmezése

A 7. ábrán látszik, hogy a kúszási sebesség és a kontaktpontban ébredő  $F_c$  kúszási erő közötti kapcsolat nagy kúszási sebességeknél jól közelíthető a Coulomb-súrlódás modelljével, kis kúszási sebességeknél pedig egy lineáris függvénnyel, amelynek meredeksége a  $c$  kúszási tényező:

$$F_c = -cu. \quad (8)$$

A szakirodalom jellemzően a  $\zeta = u/v$  *creepage* (kúszás mértéke, aránya, de a hazai szaknyelvben nem jelenik meg különbség az angol *creep*, illetve *creepage* között) mennyiséget használja a kúszás leírására, amely segítségével a kúszási erő  $F_c = -C\zeta$  alakra hoz-



7. ábra. A kúszási sebesség és a kúszási erő kapcsolatának közelítő jelleggörbéje [1]

ható, ahol  $C = cv$  sebességfüggetlen kúszási tényező. Ennek a felírásnak az előnye, hogy  $C$  csupán a kerékek és a sín érintkezési pontjában fellépő normál erőből, a kerék és a sín anyagától, valamint a kontakt geometriától függ, így meghatározása mérések, valamint ismert összefüggések alapján lehetséges (lásd például [10]).

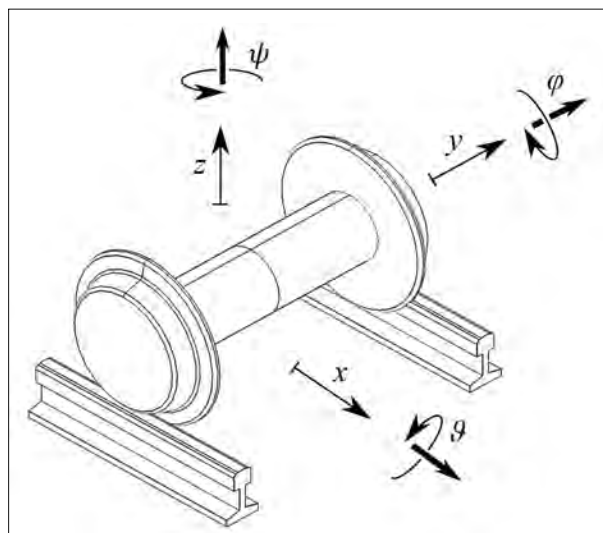
A vasúti kerékpár az előbbieket felhasználásával felírt mozgásegyenleteit számos helyen vizsgálták (például [11–14]). Az egyenletekben közös, hogy a merevtestmodellből vártnál kevesebb, két szabadságfokú rendszerként veszik figyelembe a kerékpárt, ennek kimerítő indoklása azonban nem jelenik meg az irodalmakban. Így a következőkben a vasúti kerékpár egyszerűsített modelljét felhasználva vizsgáljuk a hiányzó szabadságfokok kérdését.

## 2. Mozgásegyenletek

Ebben a fejezetben a vasúti kerék modelljének bemutatását követően megadjuk a mozgását leíró Newton–Euler-egyenleteket. Érdekességképpen kitérünk a kinematikai rezgés esetére, majd magyarázatot adunk a két szabadsági fokú dinamikai rendszerre.

### 2.1. A vasúti kerék modellje és a geometriai kényszerek

A továbbiakban egyetlen vasúti kerékpár vizsgálatára szorítkozunk, amelynek mechanikai modelljét tekintve egyszerűsítésekkel kell élnünk. Először is, a kerékpárt merev testként vesszük figyelembe, azt feltételezzük, hogy a test pontjainak távolsága a mozgás során egymáshoz képest nem változik meg. A sín és kerék érintkezésénél fellépő deformációtól tehát eltekintünk, a kontakt hatását a kúszási erővel vesszük figyelembe. A második feltételezés az, hogy a vasúti szerelvény egyenes vágányon, egyenletes sebesség-



8. ábra. A vasúti kerékpár modellje és az általános koordináták [1]

gel mozog. A kanyarodás vonatkozásaira később még kitérünk.

Merev testnek térbeli esetben hat szabadsági foka van, így első megfontolásból a probléma leírásához az 8. ábrán látható hat általános koordinátára van szükség. A kerékpár  $x$ ,  $y$ , illetve  $z$  tengelyek irányába mutató elmozdulását  $x$ -szel,  $y$ -nal, valamint  $z$ -vel, a kerékpár szimmetriatengelye körüli elfordulását  $\varphi$ -vel, a szimmetriatengelyre merőleges, az  $x$  tengellyel párhuzamos tengely körüli elfordulást  $\vartheta$ -val, a  $z$  tengely körüli elfordulást pedig  $\psi$ -vel jelöljük. A nemlineáris leíráshoz szükséges az elforgatások sorrendjének megadása az Euler-féle szögek módszerével. Linearizált egyenleteknél a forgatások sorrendjének nincs jelentősége.

A sín a kerekre normál irányú geometriai kényszerként hat, ez összesen két szabadsági fokot köt le. Ha az  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  és  $\psi$  általános koordinátákat tartjuk meg, akkor lineáris közelítésben  $z$  és  $\vartheta$  kifejezhető [15] alapján az előbbi négy általános koordináta segítségével:

$$\vartheta(y, \psi) = \frac{h}{b - hr} y + \mathcal{O}^2(y, \psi),$$

$$z(y, \psi) = 0 + \mathcal{O}^2(y, \psi).$$

Az elfordulás figyelembevételével két jellegzetes helyvektort adunk meg a  $P^-$  és  $C$ , valamint a  $P^-$  és a  $P^+$  pontok között:

$$\mathbf{r}_{P^-C} = \begin{bmatrix} -b \sin \psi \\ b \cos \psi \\ r^- \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{P^-P^+} = \begin{bmatrix} -2b \sin \psi \\ 2b \cos \psi \\ \Delta r \end{bmatrix}. \quad (9)$$

## 2.2. Kinematikai leírás

Először a test kinematikáját vizsgáljuk. A 9. ábrán jeöltük  $C$  középpont és az érintkezési pontok sebességét, ez utóbbiak a kúszási sebességek. Összefoglalva ezek a mennyiségek a

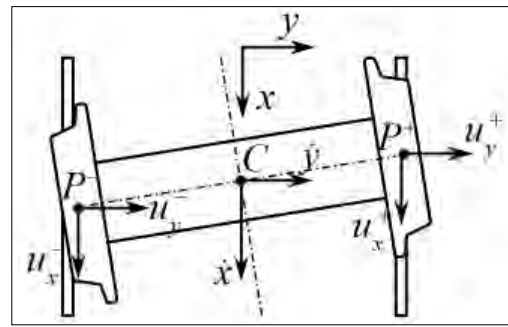
$$\mathbf{v}_C = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{P^-} = \begin{bmatrix} u_x^- \\ u_y^- \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{P^+} = \begin{bmatrix} u_x^+ \\ u_y^+ \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

vektorokkal írhatóak fel, ahol  $\dot{x}$  és  $\dot{y}$  az általános koordináták deriváltjai. Mivel a test egyenletes sebességgel halad, fennáll az  $\dot{x} = v$  összefüggés.

Tekintsük úgy, hogy a kerékpár először a  $z$  tengely körül fordul el. Ezután a kerek elfordulása már a  $\psi$ -vel elfordult szimmetriatengely körül következik be, így a test szögsebessége

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (11)$$

alakban adódik.



9. ábra. A középpont és az érintkezési pontok sebessége

Az összefüggések egyszerűsítéséhez érdemes bevezetnünk az  $x$  és  $y$  irányú kúszási sebesség-komponensek helyett az

$$u_a = \frac{u_x^+ - u_x^-}{2} \quad (12)$$

aszimmetrikus (longitudinális) kúszási sebességet, az

$$u_s = \frac{u_x^+ + u_x^-}{2} \quad (13)$$

szimmetrikus (longitudinális) kúszási sebességet, valamint az

$$u_l = \frac{u_y^+ + u_y^-}{2} \quad (14)$$

laterális kúszási sebességátlagot. A merev test modellből adódóan  $P^-$  és  $C$ , illetve  $P^-$  és  $P^+$  pontok közötti

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{P^-} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P^-C},$$

$$\mathbf{v}_{P^+} = \mathbf{v}_{P^-} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P^-P^+}$$

sebességredukciós összefüggéseket adhatjuk meg. Az egyenletekbe (9)–(11) mennyiségeket beírva, alkalmazva a (12)–(14) kúszási sebességeket, és végül a kis elmozdulások és a haladási sebességhez képest kis kúszási sebességek feltételezésével  $y$ ,  $\psi$ ,  $u_a$ ,  $u_s$  és  $u_l$  szerint linearizálva a

$$\dot{\psi} = -\frac{u_a}{b} - \frac{vh^*}{Rb} y, \quad \dot{\varphi} = -\frac{u_s}{R} + \frac{v}{R}, \quad (15)$$

$$\dot{y} = u_l + \psi v, \quad \dot{x} = v$$

négy egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszert kapjuk. Látszik, hogy a rendszer állapota hét változóval írható le (a négy általános koordináta deriváltjával és a három kúszási sebességgel), azonban csupán négy egyenletet kaptunk. Így erre az általános esetre a kinematikai összefüggések nem elegendők, figyelembe kell vennünk a test dinamikáját is. Megjegyezzük, hogy a levezetés közben a keresztirányú kúszási sebességek egymással megegyező nagyságúnak és irányúnak adódtak, ez megfelel a szakirodalomban gyakran használt feltételezésnek.

Kúszásmentes esetben a (15) egyenletrendszerben az  $u_a$ ,  $u_s$  és  $u_l$  kúszási sebességek nullák. Az összefüggések a

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -\frac{vh^*}{Rb}y, & \dot{\phi} &= \frac{v}{R}, \\ \dot{y} &= \psi v, & \dot{x} &= v\end{aligned}\quad (16)$$

formára alakultak át. Érdemes kiemelni, hogy a (16) egyenletrendszer első és harmadik egyenlete leválasztható az egyenletrendszerről, és külön vizsgálható, periodikus rezgést írnak le. Ezek az összefüggések megegyeznek a Klingel-féle (5) és (6) képletekkel (természetesen  $h$  kúposág esetén). A kinematikai rezgés elnevezés onnan ered, hogy az összefüggéseket az erők figyelembevétele nélkül, pusztán a test adott pontjainak sebessége közötti kapcsolatból vezettük le.

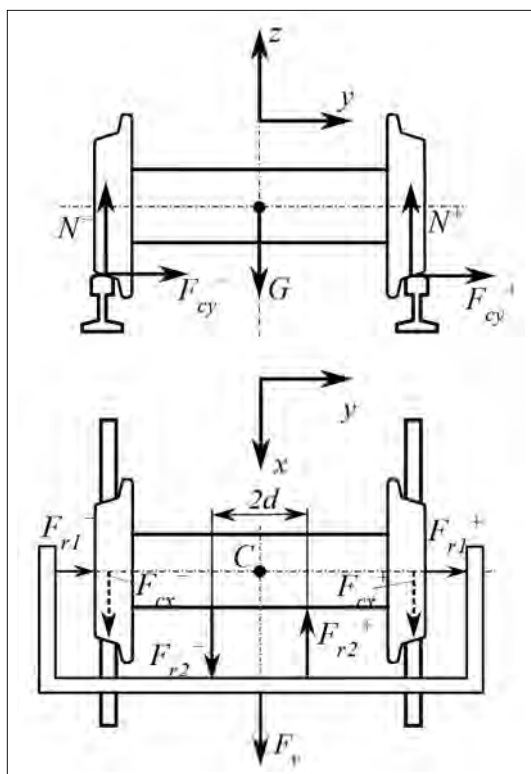
Ha az egyensúlyi helyzetből a test nem tér ki, azaz  $y$  és  $\psi$  zérus, akkor a

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= 0, & \dot{\phi} &= \frac{v}{R}, \\ \dot{y} &= 0, & \dot{x} &= v\end{aligned}$$

stacionárius, rezgés nélküli tiszta gördülés egyenleteit kapjuk.

### 2.3. Dinamikai leírás

Ahhoz, hogy az általános, kúszást tartalmazó esetet leírjuk, szükségünk van további összefüggésekre, amelyet a test dinamikájából kapunk meg. A kerékpár a 10. ábrán látható módon egy merev kerethez kapcsolódik, összesen négy rugóval. Ezek közül kettő a



10. ábra. A vasúti kerékpárra ható erők

kerekek középpontjába van bekötve, és merőlegesek a haladási irányra. A másik két rugó a haladási irányban megegyező irányú, a  $C$  ponttól  $d$  távolságra kapcsolódnak a kerekeket összekötő tengelyhez. A keresztirányú rugókban  $F_{r1}^-$  és  $F_{r1}^+$  nagyságú, míg a longitudinális rugókban  $F_{r2}^-$  és  $F_{r2}^+$  nagyságú rugóerők ébrednek. Ez egy, az irodalomban szokásos lehetőség a rugalmas felfüggesztés modellezésének (például [16]). Bármely felfüggesztés helyettesíthető összesen két, a  $C$  pontban bekötött rugóval: egy  $k_y$  egyenértékű merevségű,  $y$  irányú rugóval, valamint egy  $z$  tengely körül forgató,  $k_\psi$  egyenértékű merevségű torziós rugóval.

Az  $y$  irányú rugó  $F_y = -k_y y$  erőt (az erő iránya ellentétes a kitérés irányával), a torziós rugó pedig  $M_\psi = -k_\psi \psi$  nyomatékot fejt ki, a rugómerevségek tartalmazzzák a gravitációs merevséget [4] alapján.

A merev kereket az  $F_y$  erő vontatja az  $x$  tengely irányába. A kerékpárra nehézségi erő hat, valamint a vonat súlyából származó erő nyomja, ezek eredőjét a kerékpár tömegközéppontjába, a  $C$  pontban ható,  $G$  nagyságú erővel vesszük figyelembe. A kerekek és a sín érintkezési pontjaiban ébredő reakcióerők normálirányú komponenseit  $N^-$  és  $N^+$ ,  $x$  irányú komponenseit

$$F_{cx}^- = -c_x u_x^-, \quad F_{cx}^+ = -c_x u_x^+,$$

az  $y$  irányú komponenseit

$$F_{cy}^- = -c_y u_y^-, \quad F_{cy}^+ = -c_y u_y^+$$

jelöli, az  $x$  és  $y$  irányú erők a kúszóerők (8) alapján.

A dinamikai összefüggéseket az

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= m\mathbf{a}_C, \\ \mathbf{M}_C &= \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})\end{aligned}\quad (17)$$

Newton–Euler-egyenletek felírásával nyerjük, ahol  $\mathbf{F}$  a testre ható erők eredője,  $m$  a kerékpár tömege,  $\mathbf{a}_C$  a  $C$  pont gyorsulása,  $\mathbf{M}_C$  a  $C$  pontra számított nyomatékok eredője,  $\mathbf{J}$  a kerékpár tehetetlenségi nyomatéki tenzora,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a test szöggyorsulása. A részletes levezetést mellőzve, a (17) egyenleteket egyesítve (15) első és harmadik összefüggésével a

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -\frac{u_a}{b} - \frac{vh^*}{Rb}y, & \dot{y} &= u_l + \psi v, \\ \dot{u}_l &= \left( \frac{v^2 h^*}{Rb} - \frac{k_y}{m} \right) y + \frac{v}{b} u_a - \frac{2}{m} c_y u_l, \\ \dot{u}_a &= \left( -\frac{v^2 h^*}{R} + \frac{k_\psi b}{J_{s\psi}} \right) \psi - \frac{vh^*}{R} u_l - \frac{2b^2}{J_{s\psi}} c_x u_a, \\ \dot{u}_s &= -\frac{2R^2}{J_{s\phi}} c_x u_s\end{aligned}\quad (18)$$

egyenletrendszerre jutunk, amely teljeskörűen leírja a test dinamikáját. Az összefüggésekben  $J_{s\psi}$  a  $z$  ten-

gelyre,  $J_{s\varphi}$  a kerékpár szimmetriatengelyére számított tehetetlenség nyomaték.

A (18) egyenletrendszer tekintve megállapítható, hogy  $u_s$  dinamikája nem befolyásolja a többi változót, valamint a többi változó sem befolyásolja  $u_s$ -t. Így külön vizsgálható (18) utolsó egyenlete. Ez egy közönséges, elsőrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlet, amely önmagában is megoldható. Így a szimmetrikus kúszási sebesség az

$$u_s(t) = u_s(t=0) \cdot \exp\{- (2R^2/J_{s\varphi}) \cdot c_x t\} \quad (19)$$

összefüggésnek megfelelően alakul. Látható, hogy ez egy exponenciálisan lecsengő függvény, így adott idő

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{y} \\ \dot{u}_l \\ \dot{u}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{vh^*}{Rb} & 0 & -\frac{1}{b} \\ v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{v^2 h^*}{Rb} - \frac{k_y}{m} & -\frac{2}{m} c_y & \frac{v}{b} \\ -\frac{v^2 h^*}{R} + \frac{k_\psi b}{J_{s\psi}} & 0 & -\frac{vh^*}{R} & -\frac{2b^2}{J_{s\psi}} c_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi \\ y \\ u_l \\ u_a \end{bmatrix} \quad (20)$$

mátrixalakra. A (20) egyenlet jobb oldalán álló első mátrix a rendszer együtthatómátrixa. Az egyensúlyi helyzet akkor (aszimptotikusan) stabil, ha az együtthatómátrix mindegyik sajátértéke negatív valós részű. A sajátértékek meghatározása negyedfokú egyenlet megoldására vezet, viszont mivel konkrét értékekre nincs szükségünk (csupán valós részük előjelére), elegendő a Hurwitz-kritériumot alkalmazni. A levezetés részleteit mellőzve a stabilitásvesztés kritikus sebességére

$$v_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{(\gamma_\psi + \gamma_y)(\alpha_y^2 \gamma_\psi + \alpha_\psi^2 \gamma_y)}{(\gamma_\psi + \gamma_y)^2 \zeta - (\alpha_\psi^2 - \alpha_y^2)^2}} \quad (21)$$

adódik, ahol

$$\gamma_y = 2 \frac{C_y}{m} = 2 \frac{c_y v}{m}, \quad \gamma_\psi = 2 \frac{C_x b^2}{J_{s\psi}} = 2 \frac{c_x v b^2}{J_{s\psi}}$$

normalizált kúszási tényezőket,

$$\alpha_y^2 = k_y / m, \quad \alpha_\psi^2 = k_\psi / J_{s\psi} \quad (22)$$

az  $y$  irányú, valamint a  $z$  tengely körül forgató rugók sajátkörfrekvenciáját, és

$$\zeta = h^* / bR \quad (23)$$

normalizált kúposágot vezettük be a kifejezés egyszerűsítése végett.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy a kúposág, valamint a rugómerevségek miként befolyásolják a rendszer kritikus sebességét. A kúposág hatása egyértelműen látszik a (21) és (23) összefüggésekből,

után  $u_s$  nem befolyásolja a jármű mozgását. Vissza tekintve (13)-ra validálható a szakirodalomban használt feltételezés, miszerint a longitudinális kúszási sebességek megegyező nagyságúak és egymással ellentétes irányúak. Ezzel beláttuk, hogy a jármű dinamikája leírható két szabadságfokú rendszerrel.

### 3. Stabilitási jellemzők

A vasúti kerékpár mozgásegyenleteinek ismerete lehetővé teszi a stabilitásvesztés kritikus sebességére vonatkozó összefüggés felállítását. Ehhez a (18) egyenletrendszer első négy egyenletét átírjuk a

a kúposág csökkentésével növelni lehet a kritikus sebességet. A szemléltetéshez [13]-ból származó

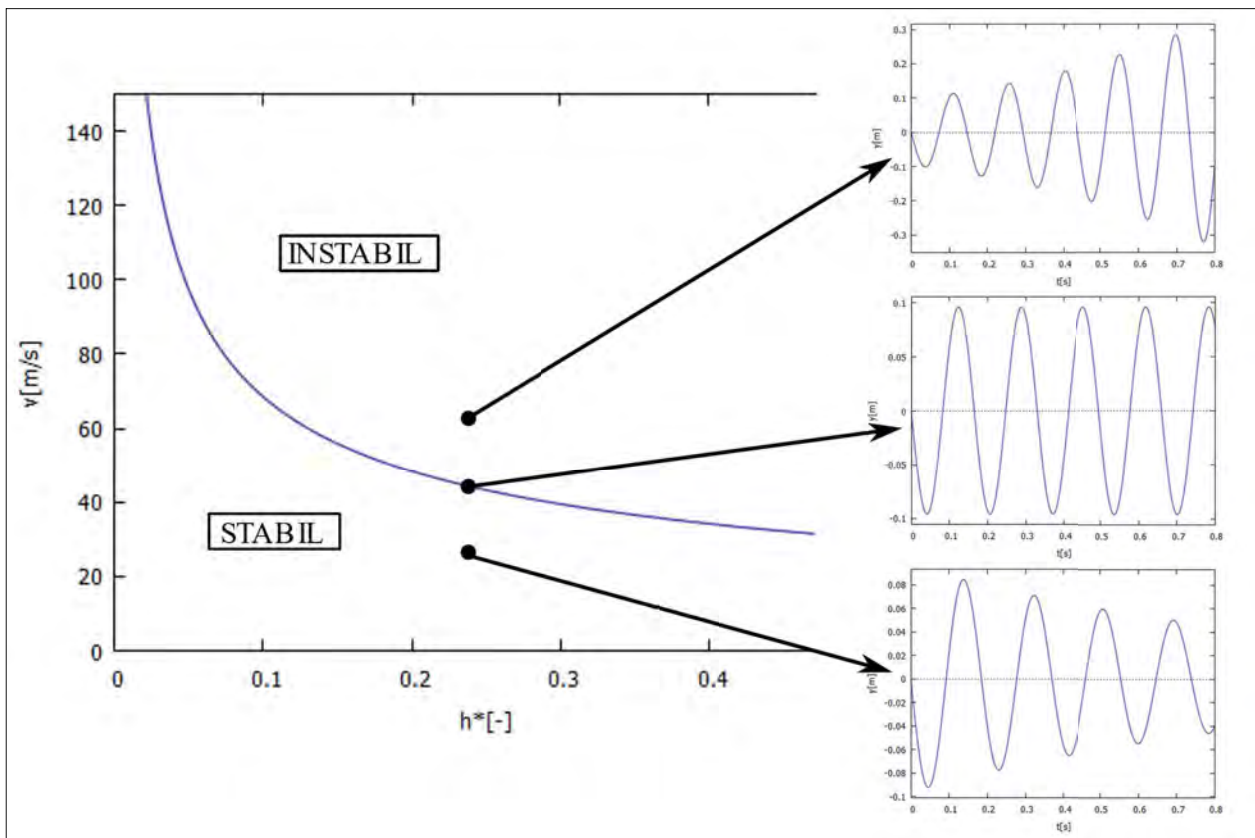
$$\begin{aligned} R &= 0,43 \text{ m}, & J_{s\psi} &= 685 \text{ kgm}^2, \\ b &= 0,7456 \text{ m}, & C_x &= 8,9 \cdot 10^6 \text{ N}, \\ m &= 2000 \text{ kg}, & C_y &= 8,8 \cdot 10^6 \text{ N} \end{aligned}$$

paramétereket használjuk fel. A rugómerevségeket

$$k_y = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}, \quad k_\psi = 1,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

értékekre megválasztva a 11. ábrán látható diagram adódik. Az ábrán bejelöltük a stabil és az instabil tartományt, a (21) függvény a stabilitás határát adja. Ezen a ponton periodikus rezgések jellemzők. Ha a jármű sebességét növeljük, és a haladási sebesség meghaladja az adott kúposágra vonatkozó kritikus sebességet, akkor a rezgések amplitúdója idővel növekszik, tehát a kitérések egyre nagyobbak lesznek, a rendszer instabillá válik. Adott kúposágnál, a kritikus sebességnél alacsonyabb haladási sebesség esetén a rendszer stabil, azaz ha kitérítjük az egyensúlyi helyzetből, akkor a rezgés idővel csillapodik, a kitérések csökkennek. A kúposág csökkentésének korlátját a (4) összefüggésből láthatjuk. Kanyarodásnál létezik egy olyan maximális kitérés, amely a sín-pálya fizikai jellemzőiből adódik, ez pedig egy minimálisan megszabott kúposágot jelent.

A (21) összefüggésből a rugómerevségek hatása nem triviális. Megmutatható azonban, hogy a fizikailag releváns paraméterek esetén a sajátfrekvenciák (tehát valójában (22) alapján a rugómerevségek) növelése a



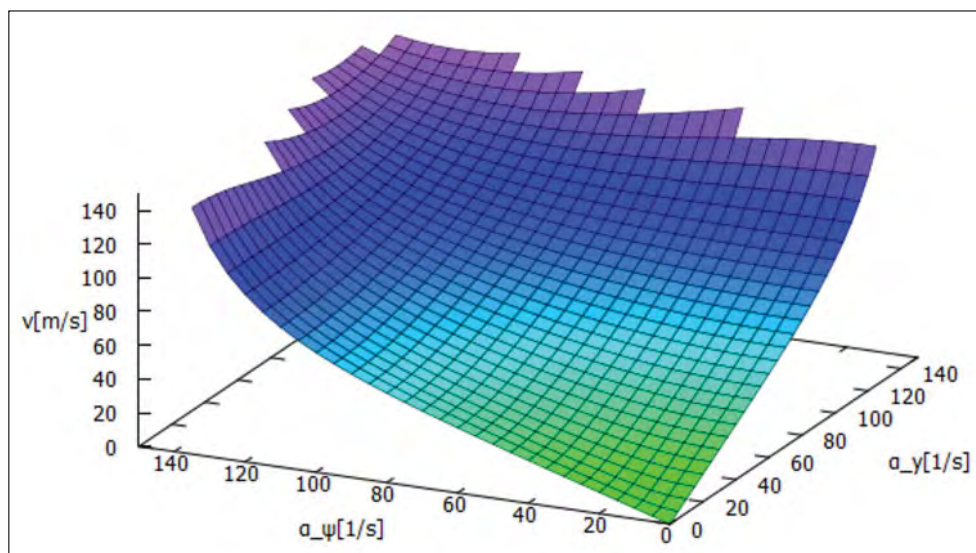
11. ábra. A kúposág hatása a kritikus sebességre

kritikus sebesség növekedését eredményezi. Szemléltetésként esetén a 12. ábrán látható függvény adódik.

#### 4. Összefoglalás

A tanulmányban a vasúti kerékpár mozgásegyenleteit írtuk fel a jármű kinematikai és dinamikai jellemzőiből. Láttuk, hogy kúszásmentes esetben a kialakuló rezgéseket pusztán a kinematikai összefüggések is leírják, a kinematikai rezgések függetlenek a kerék

kezdeti helyétől és szimmetriatengelye körüli elfordulásától. A dinamikai vizsgálatból megmutattuk, hogy a szimmetrikus kúszások lecsengő jellegűek, nem befolyásolják a mozgást. Emiatt a dinamikai rendszer két szabadsági fokkal leírható. Meghatároztuk a stabilitásvesztés kritikus sebességét leíró összefüggést, és kimutattuk, hogy a kerék kúposágának csökkentésével, valamint a felfüggesztések merevségének növelésével lehetséges a kritikus sebesség növelése.



12. ábra. A sajátkörfrekvenciák hatása a kritikus sebességre



## Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet kifejezni dr. Antali Máténak, aki hasznos észrevételeivel és javaslataival sok segítséget nyújtott a tanulmány megírásához.

## Irodalomjegyzék

- [1] Antali M.: *Dynamics of Dual-Point Rolling Bodies*. PhD-értekezés, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest, 2018
- [2] Wickens A. H.: *Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics*. Swets & Zeitlinger Publishers, Lisse, 2007, 300 p.
- [3] Wickens A. H.: A History of Railway Vehicle Dynamics. In: Iwnicki S., Spiryagin M., Cole C., McSweeney, T. (eds.): *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, 2019, 5–38.
- [4] Iwnicki S.: Simulation of wheel-rail contact forces. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures*, 26/10 (2003) 887–900.
- [5] Finta E.: *Tervezési és gyártási paraméterek hatása vasúti kerék rezgéseire*. Szakdolgozat, Széchenyi István Egyetem, Győr, 2023
- [6] Orlova A., Boronenko Y.: The anatomy of railway vehicle running gear. In: Iwnicki S., Spiryagin M., Cole C., McSweeney T. (eds): *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, 2019, 40–83.
- [7] Heumann H.: Lauf der Drehgestell-Radsätze in der Geraden. *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens*, 92 (1937) 149–173.
- [8] Klingel J.: Über den Lauf von Eisenbahnwagen auf gerader Bahn. *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens*, 38 (1883) 113–123.
- [9] Reynolds O.: On rolling friction. *Philosophical Transactions*, 166 (1876) 155.
- [10] Mousavi S. A., Shirazi K. H., Fatahi L.: Effect of dynamic creep coefficients and external load on hunting velocity in a railway vehicle. *Acta Polytechnica Hungarica*, 19/6 (2022) 143–161.
- [11] Szabó Zs., Lóránt G.: Parametric excitation of a single railway wheelset. *Vehicle System Dynamics*, 33/1 (2000) 49–55.
- [12] Meijaard J. P.: The motion of a railway wheelset on a track or on a roller rig. *Procedia IUTAM*, 19 (2016) 274–281.
- [13] Wu X., Chi M.: Parameters study of hopf bifurcation in railway vehicle system. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 10/3 (2015) 031012.
- [14] Guo J., Shi H., Luo R., Zeng J.: Bifurcation analysis of a railway wheelset with nonlinear wheel–rail contact. *Nonlinear Dynamics*, 104 (2021) 989–1005.
- [15] Antali M., Stépán G.: On the nonlinear kinematic oscillations of railway wheelsets. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 11/5 (2016) 051020.
- [16] Lóránt G., Stépán G.: The role of non-linearities in the dynamics of a single railway wheelset. *Machine Vibration*, 5 (1996) 18–26.



**3B** | **3B Hungária Kft.**  
H-8900 Zalaegerszeg, Wlassics Gyula u. 13. • Tel.: +36 92/549-033  
info@3bh.hu • www.3bh.hu

HIVATALOS MAGYARORSZÁGI **metso** KÉPVISELET

