

Kőzetek hasítása, a repedés keletkezése és terjedése

Rock splitting, crack formation and propagation

OMASZTA ISTVÁN

Okleveles bányagépész- és bányavillamossági mérnök, okleveles mérnöközgazdász

E-mail: omaszta1957@gmail.com



Az energiaköltség az egyik meghatározó költségelemmé vált. Minden magas energiataralmú termelési folyamat elemzése és a folyamat optimalizálása rendkívüli fontossággal bír; egy vállalat versenyképességének biztosításához elengedhetetlen. A kőzetek, tágabb értelemben minden talaj- és kőzetbontás nagy energiaigényű folyamat. Ebben a munkafolyamatban két egymáshoz kapcsolódó fizikai jelenség lép fel, a bontószerszám és/vagy gép kopása és a bontószerszámok, a hajtás és energiaellátás és a tartószerkezet kialakításához köthető energiafogyasztás. Energiafogyasztás alatt a bontószerszámok által, a termelési fázisban generált teljes energiaszükségletet értjük, különös szerepet játszik a kőzetbontás energiaszüksége.

Ebben az írásban, a hasítási folyamat energetikai szemléletű leírását adom meg, ami az [1] és [2] cikkben részben megtörtént, kivéve a repedés keletkezése és terjedése nem került tisztázásra, amit ezennel pótolok. Leírása [2] szerint a kőzetbontásnak elvi szempontból téves, mert a hasítást közelítő függvénnyel modellezi. Ezekben a kvázi statikus kőzethasítási modellekben a repedés terjedésének véges időszüksége nem jelenik meg, a folyamat mintegy nulla időtartam alatt megy végbe.

A fizikai folyamat dinamikai szemléletű leírása nem tárgya ennek a cikknek. Ez a tanulmány azt a hiányt szándékozik bepótolni, amit [1] 3. fejezetében közelítő jellel közöltem. Ez a repedés megindulása és a repedésterjedés leírása.

Kulcsszavak: kőzetek hasítása, energiafogyasztás, kőzethasítási modell

Energy costs have become one of the determining cost elements. The analysis of all high-energy production processes and the optimization of the process are of utmost importance and are essential for ensuring the competitiveness of a company. Rocks, and in a broader sense all soil and rock demolition, are energy-intensive processes. Two interconnected physical phenomena occur in this work process, the wear of the demolition tool and/or machine and the energy consumption associated with the construction of the demolition tools, the drive and energy supply and the supporting structure. Energy consumption is understood as the total energy requirement generated by the demolition tools in the production phase, the energy requirement of rock demolition plays a special role.

In this paper, I will give an energetic description of the cleavage process, which was partly done in [1] and [2], except that the formation and propagation of the crack were not clarified, which I will fill in here. The description of rock breaking according to [2] is fundamentally wrong because it models the cleavage with an approximate function. In these quasi-static rock cleavage models, the finite time requirement for crack propagation does not appear, the process takes place in approximately zero time.

The dynamic description of the physical process is beyond the scope of this article. This paper aims to fill the gap that I have addressed in Chapter 3 of [1], which is the description of crack initiation and crack propagation.

Keywords: rock splitting, energy consumption, rock cleavage model

1. A közethasítás energiaátalakulásai

1.1. Általános energiamérleg

A külső erők munkája – az ékkel történő hasításkor az előtolóerő által végzett mechanikai munka – kifejezhető a közet maradó és rugalmas alakváltozásának energiaszükségletével és a súrlódás legyőzésére fordított mechanikai munkával. Ehhez járul a repedés létrejöttkor keletkező felületek energianövekedése:

$$dW = T(e)de = dW_e + dU_h + dW_s + 2\Gamma b da, \quad (1)$$

ahol, dW a rendszer teljes energiája, T az előtolóerő, p a behatolás mélysége, de az elemi előtolás, da az elemi repedéshossz-növekmény, $W_e(T, Q)$ az ék által a közetben okozott maradó irreverzibilis alakváltozás energiája, amely a Q sugarú tompa él benyomódásának a W_e energiaszükségletét tartalmazza. $dU_h(T, a, t)$ az a rugalmas energia, amelyet az ék behatolása vált ki, ahol a a kialakult repedéshossz és t a meghajlított forgács vastagsága. Továbbá $dW_s(T, a, \theta)$ a súrlódási energiavesztés, ahol θ az ékszög fele és Γ az effektív törési energia egységnyi új b repedésfelületre (b a szerszám szélessége) vonatkoztatott értéke, amely tartalmazza az újonnan elvált felületek energianövekményét $dW_\gamma = \gamma ba$, ahol γ a felületi energia és τ a képlékeny zóna fajlagos alakváltozási munkáját $dW_\tau = \tau b \delta p$, azaz $\Gamma = (\gamma + \tau)$. A gyakorlati számításokhoz lényegesen magasabb értékeket szokás a törési energiára felvenni. Az aprózódással együtt ez a Γ_{eff} érték a 2000 J/m²-t is eléri homokkő ékkel való hasításkor [3].

Megjegyzendő, hogy az egyenlet nem tartalmazza a szerszám ütközése által kiváltott rugalmas hullámok energiáját, a mechanikai súrlódás okozta hőfejlődést és a hasítási folyamatkor a légtérbe leadott rezgési és hőenergia tagot. A közet szekunder törési energiája sem lesz figyelembe véve. Ez a leírás nem veszi figyelembe a szerszámot hajtó gépszerkezet rugalmas szerkezetét és forgó-lengő tömegének energiáját sem.

1.2. Az ékkel történő közetbontás részfolyamatai

A folyamat leírását nem észszerű egy egységesített mérlegegyenlettel leírni, mert négy egymástól teljesen eltérő, egymásba folyamatosan átalakuló mozzanatból áll össze a teljes fizikai esemény:

- Behatolás 1: A szerszám hegye roncsolva behatol a közetbe. Ez a szakasz az ékhatás kialakulásáig tart (2. fejezet).
- Behatolás 2: Az ékhatás kiteljesedik. Ez a szakasz a repedés megindulásáig tart (3. fejezet).
- Törés és a repedés keletkezése, repedések keletkezése (4. fejezet).
- Repedés kialakulása és terjedése a törésig, azaz az anyag teljes leválásáig (5. fejezet).

Ehhez a témakörhöz szervesen kapcsolódik még egyes közethasítási folyamatok nemlineáris természet (6. fejezet) és a repedéspálya (7. fejezet) elméleti meghatározása. A következőkben ezeket a folyamatokat fogjuk elemezni. A cikket az eredmények alkalmazásával zárom, homokkő hasítása esetére közlök néhány diagramot (8. fejezet).

2. Behatolás 1: A szerszám $Q \neq 0$ sugarú hegyének behatolása az ékhatás belépéséig (1) szerint

$$dW = T(e)de = dW_e + dW_s, \quad (2)$$

az egyenleteket a $T(p)$ előtolóerőre és annak $W(p)$ munkájára (1) szerint közlöm. Ezen a szakaszon az e előtolás értéke $e = p$, (p a behatolás) egyenlő a behatolás mélységével. Az előtoló irányú felületre ható e erővektorok integrálja a behatoló felületre (az él mint hengerpalást) a fél Θ ékszög függvényében kapható. Az integrál határainak a szerszám csúcsát, $\varepsilon = 0$ és az ékfelület kezdetét, $\pi/2 - \theta$ között választjuk:

$$T(\alpha) = 2\sigma_1 b Q \int_{\varepsilon=0}^{\alpha} (\cos \varepsilon + \mu \sin \varepsilon) d\varepsilon,$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{p}{Q}; \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \theta,$$

ahol $p(e)$ a behatolás és Q a szerszám élsugara. Következik ebből az integrálból, a $T(p)$ előtoló erő és annak a $W(p)$ munkája a $p \in [0, Q(1 - \sin \theta)]$ tartományban:

$$T(p) = 2\sigma_1 b \left(\sqrt{p(2Q - p)} + \mu p \right), \quad (3)$$

$$W(p) = 2\sigma_1 b \left[Q^2 \arccos(1 - p/Q) - (Q - p) \sqrt{p(2Q - p)} \right] + \sigma_1 b \mu p^2, \quad (4)$$
$$p \in [0, Q(1 - \sin \theta)].$$

3. Behatolás 2: Az ékhatás belépése és kiteljesedése a törésig

Feltételezzük, hogy továbbra is jelentős a közet dW_e morzsolódása a behatolási zónában, a közet alakváltozása, a rugalmas energia felhalmozódása még nem jelentős, és a repedés még nem indult meg, $a = 0$. Továbbra is igaz, $de = dp$, $da = 0$, a repedés még mindig nem indul el, csak a feszültség nő (az energia a feszültség növekedésével tárolódik ugyan a közetben, de elhanyagolható, $U_h \sim 0$). Az ék felületén bekövetkező közetroncsolódást W_e -vel vesszük figyelembe. Jelentősen nő az $R(e)$ feszítőerő, amely a folyamat végén a repedés megindulását, $a > 0$, fogja kiváltani. Továbbra is jelentős a súrlódás:

$$dW = T(e)de = dW_e + dW_s. \quad (5)$$

A $T(p)$ előtolóerő a törés bekövetkezéséig, a hajlítási energia elhanyagolásával (1) szerint: $e = p$.

$$\begin{aligned} T(p) &= F_1(\theta) + 2\sigma_1 b(\tan\theta + \mu)(p - p_1), \\ p_1 &= Q(1 - \sin\theta), \end{aligned} \quad (6)$$

ebből integrálással adódik az előtoló erő munkája:

$$\begin{aligned} W(p) &= W(p_1) + F_1(\theta)(p - p_1) \\ &+ \sigma_1 b(\tan\theta + \mu)(p - p_1)^2; \quad p \geq p_1, \end{aligned} \quad (7)$$

ahol $F_1(\theta)$ az első (I) fázisban elért maximális előtolóerő, ahol $p = Q(1 - \sin\theta)$. A levezetések az [1] hivatkozás 2. és 3. fejezetében találhatóak.

4. Törés és a repedés keletkezése, repedések keletkezése

Az általánosan kifejezett és idealizált energiamérleget a repedés megindulása után is a lejátszódó fizikai folyamatok szerint kell módosítani. A $G(e, a)$ ún. energiakioldási ráta bevezetésével Griffith vizsgálta repedések terjedésének energetikai feltételeit [4]. Ehhez vegyük a következő általános potenciálfüggvényt:

$$\Pi = W_e + U_h + W_s + 2b\Gamma_{\text{eff}} a - W, \quad (8)$$

ahol W a T előtolóerő mechanikai munkája az e előtolás mellett:

$$W(e, a) = \int_{\zeta=0}^e T(\zeta, a) d\zeta.$$

A repedés megindulásának és terjedésének feltétele, ha a rendszer által felszabadított energiacsökkenés fedezi a képződő új felület energiaszükségletét:

$$G(e, a) = -\frac{1}{b} \frac{\partial \Pi}{\partial a} \geq 2\Gamma, \quad (9)$$

mivel két felület keletkezik. A $G_e(e, a)$ energiakioldási ráta definíciója szerint rendezve kapjuk a repedés egyensúlyi egyenletét és terjedési feltételét:

$$\begin{aligned} G_e(e, a) &= \frac{1}{b} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial a} \right)_e - \left(\frac{\partial U_h}{\partial a} \right)_e \right. \\ &\left. - \left(\frac{\partial W_e}{\partial a} \right)_e - \left(\frac{\partial W_s}{\partial a} \right)_e \right] \geq 2\Gamma_{\text{eff}}. \end{aligned} \quad (10)$$

A (10) egyenlet egy általános megfogalmazása a jelenségnek, azonban a hasadási folyamat során változnak az egyes komponensek. Ez lehetőséget ad arra, hogy a folyamatot modellezzhessük, jobb matematikai leírást találjunk.

$$\left(\frac{\partial W}{\partial a} \right)_e = \int_0^e \left(\frac{\partial T(\zeta, a)}{\partial a} \right)_e d\zeta. \quad (11)$$

A $(\partial \Pi / \partial e)_a = 0$ feltétel mellett:

$$T(e, a) = \left(\frac{\partial U_h}{\partial e} \right)_a - \left(\frac{\partial W_e}{\partial e} \right)_a - \left(\frac{\partial W_s}{\partial e} \right)_a. \quad (12)$$

Magyarázat: A Griffith-féle energiaalapú repedés-kritériumban az energiakioldási ráta definíciója $G = -(1/b)(\partial \Pi / \partial a)$, azonban a parciális deriváltat mindig a kísérlet/peremfeltétel által rögzített vezérlő vál-

tozó állandón tartása mellett kell képezni. Előtolás- (elmozdulás-) vezérelt esetben $e = \text{konstans}$, ezért a $T = T(a)$ terhelés alkalmazkodik, és $G_e = -(1/b) \cdot (\partial \Pi / \partial a)_e$. Erővezérelt esetben $T = \text{konstans}$, ezért az $e = e(a)$ előtolás-változik, és $G_T = -(1/b) \cdot (\partial \Pi / \partial a)_T$. Ennek megfelelően a külső munkatag deriváltja is különbözik:

$$(\partial W / \partial a)_e = \int_0^e (\partial T / \partial a)_e d\zeta,$$

míg

$$(\partial W / \partial a)_T = T(\partial e / \partial a)_T.$$

Disszipatív tagok (W_e morzsolódás, W_s súrlódás) jelenlétében ez a különbségtétel nem formai, hanem a modell konzisztenciájának feltétele.

A tompa csúcs és az ék felületén lokális hidrosztatikus képlékeny zóna alakul ki, ahol a repedés megindulásához, $\Gamma_{\text{init}} > \Gamma_{\text{eff}}$, nagyobb Γ_{init} energiára van szükség, mint annak Γ_{eff} stabil terjedéséhez. A repedés elindulása előtt a $T(e)$ előtolóerő addig nő, míg $G(e, a)_{\text{max}} = 2\Gamma_{\text{init}} > 2\Gamma_{\text{eff}}$ lesz a feltétel. A repedésindítási küszöb és a lokális feszültségkoncentráció erősen függ a szerszám Q tompaságától; ez az indítási erőszintet befolyásolja (nem a tisztán a felületek érintkezéséből adódó kezdeti feltétel). A rugalmas energia $\partial U_h / \partial a = 0$ itt még nem játszik szerepet, a $\partial W_s / \partial a$ súrlódás és a maradó $\partial W_e / \partial a$ alakváltozás mértékadó. Ezért a repedés kialakulása a (10) szerint határesetben, a következő feltétel teljesülésétől függ:

$$\left[\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial W_e}{\partial a} - \frac{\partial W_s}{\partial a} \right] \geq 2b\Gamma_{\text{init}}. \quad (13)$$

Az ékerő munkája a törésig a (7) egyenlet szerint $W - W_e - W_s \sigma_1 b(\tan\theta + \mu)e^2$, ahol a $Q = 0$ esetet vettük. Ekkor (13) egyszerűsíthető, ha figyelembe vesszük azt, hogy repedés még csak születőben van, azaz $a = e$: $2\sigma_1(\tan\theta + \mu)e = 2\Gamma_{\text{init}}$. Ekkor az előtolóerő éppen a maximumát éri el, W nem függ a repedés-terjedéstől, a repedés méretével nem definiálható. Ekkor a repedés-csúcsban kialakuló, az ék benyomulása hatására történő egyensúlyi helyzet megbillenezése váltja ki a repedés indulást. Ez az $e_{\text{init}} = \Gamma_{\text{init}} / [\sigma_1(\tan\theta + \mu)]$ behatolás mellett valósul meg. Ekkor indul meg a repedés. Vegyük észre, hogy rideg köztekben nagy törőszilárdság σ_1 (!) esetén az e_{init} szükségyszerűen kicsi, a törés kis behatolásnál létrejön: $T_{\text{init}} = 2b\Gamma_{\text{init}}$.

5. Repedés kialakulása és terjedése a törésig, azaz az anyag teljes leválásáig

A repedés terjedésének stabilitása a következő feltételek mellett alakul: az ékerő a stabil terjedési szakaszban platót ér el, és jó közelítéssel állandó értéket (\hat{T}) vesz fel. Ekkor jó közelítéssel a súrlódás játszik szerepet.

Amennyiben elhanyagolható a hajlítás következik:

$$\frac{\partial U_h}{\partial a} + \frac{\partial W_e}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial a} = 2b\Gamma_{\text{eff}} + \frac{\partial W_s}{\partial a}. \quad (14)$$

Mivel

$$W = \hat{T} \cdot e, \quad \frac{\partial W}{\partial a} = \hat{T} \frac{\partial e}{\partial a} = \frac{\hat{T}}{da/de},$$

a súrlódás és a maradó alakváltozás tagok elhagyásával (14)-ből az előtolóerő konzervatív értékét nyerjük: $\hat{T}_{\text{eff}} \approx 2b\Gamma_{\text{eff}}$. Első közelítésben tehát az előtolóerő a felületi energiák arányában alakul.

$$\frac{T_{\text{init}}}{\hat{T}_{\text{eff}}} \approx \frac{\Gamma_{\text{init}}}{\Gamma_{\text{eff}}}. \quad (15)$$

Ha egy előtolás-vezérelt rendszert feltételezünk a súrlódási munkavesztés: $W_s = \beta e(\hat{T})$, ahol $\beta = [1 + \tan\theta/\mu]^{-1}$. Az e hossz nem más, mint az ék relatív csúszása a hasadásban, amelyet az előtolás hosszával azonosíthatunk a hasítás során. Mindezt figyelembe véve (15) szerint:

$$\frac{\hat{T}}{\partial a/\partial e} = 2b\Gamma_{\text{eff}} + \frac{\beta}{\partial a/\partial e} \hat{T}. \quad (16)$$

Az egyenlet megoldható az előtolóerőre és a $\partial a/\partial e$ arányra kifejezve. Figyelembevéve, hogy fizikailag csak a $\partial a/\partial e \geq 1$ értékeknek van létjogosultságuk:

$$\frac{\partial a}{\partial e} = \frac{1-\beta}{2b\Gamma_{\text{eff}}} \hat{T}, \quad (17)$$

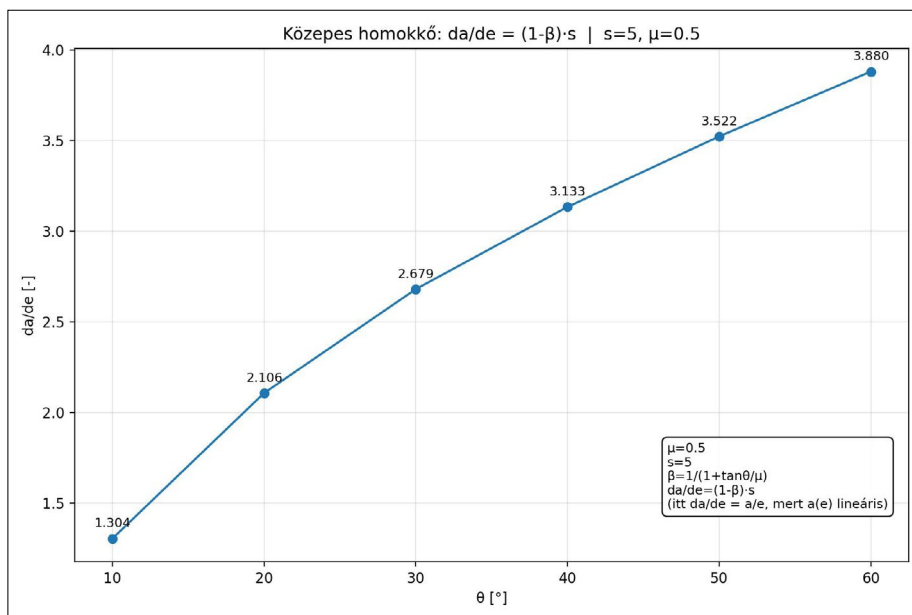
$$a(e) = \left[\frac{1-\beta}{2b\Gamma_{\text{eff}}} \hat{T} \right] e. \quad (18)$$

Látható az összefüggések alapján, ha a repedés hossza és az előtolás hosszához közelít, a μ súrlódás és a θ ékszög hatása kezd érvényre jutni. Viszont fordítva azt is látjuk, hogy nagy előtolóerők esetén a repedés dinamikáját egyre inkább a súrlódás és az ékszög határozza meg. Mit mondhatunk ez esetben az $a(e)$ függvényről? Mivel T konstans, da/de is az, amennyiben a többi paraméter független a -tól. A függvény lineáris, ahol $a = C \cdot e$, $C = f(\mu, \theta, b, \Gamma_{\text{eff}}, \hat{T})$ az iránytangens.

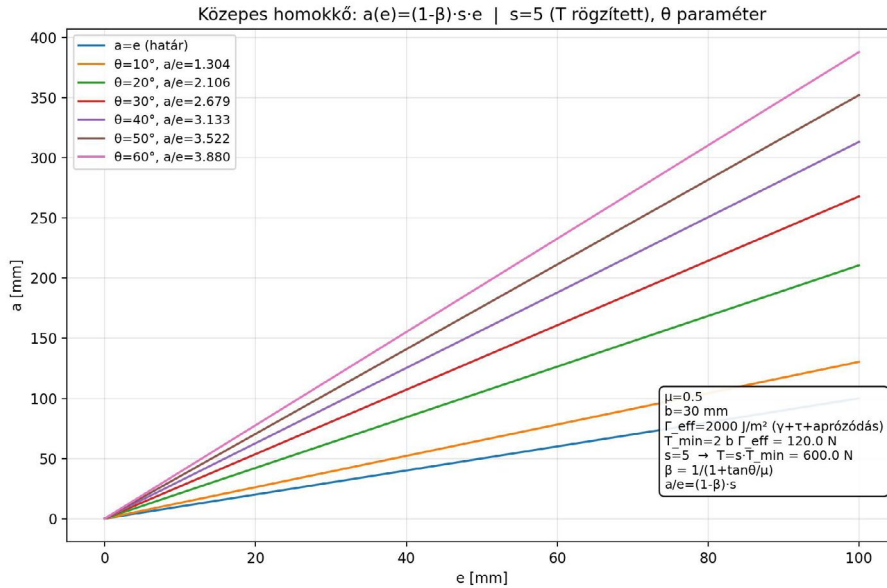
6. Nemlineáris közethasítási folyamatok

Minden, az NME-n végzett bányagépész ismeri a Bocsánczy János professzor által tanított, főleg szén gyalulásának témakörében alkalmazott jövesztési elméletét [5]. Az általa felállított elmélet is egy nemlineáris törésmélet, amely figyelembe veszi a főleg hajlításon alapuló alakváltozást és az azt lezáró törést. Igaz, az elmélete a törést kiváltó feszültségemelkedésre alapozta. Ezt az utat követi sok más szerző is [6, 7]. Mi itt csak egy apró lépéssel, az előző fejezetben alkalmazott egyenleteket kiegészítjük az alakváltozáshoz kötődő dU_h rugalmas energiatárolási taggal. Ez minden bizonnyal akkor válik hathatós eszközzé, ha az alakváltozási energia a folyamatban jelentőssé válik. Ehhez természetesen a közet rugalmassága alapvető feltétel. Ilyen közet jellemzően a kvarcit és a gránit. Az (1) általános energiamérleg alapján a repedés az elindulásának pillanatától integrális formában:

$$\int_{\zeta=0}^e T(\zeta) d\zeta = \int_{\eta=0}^a T_e(\eta) d\eta + \int_{\zeta=0}^e \beta T(\zeta) d\zeta + 2b \int_{\eta=0}^a \Gamma(\eta) d\eta.$$



Az $f = da/de$ differenciál ábrázolása homokkő esetére az ékszög függvényében



Az $a(e)$ függvény ábrázolása homokkő esetére az előtolás és az ékszög függvényében

Feltételek:

- ❑ Kizárólag az előtolóerő által végzett mechanikai munka fedezi a közethasítás energiaszükségletét, az egyértelműen a $T(\zeta)$ függvényből számítható.
- ❑ Az ék behatolásával morzsolódik a kőzet, és ennek az energiavesztesége irreverzibilis és arányos a repedés hosszával: $dW_e = cTda$, ahol c mérésekből meghatározandó tényező. Valójában ezt az energiaveszteséget a Γ értékében szokás figyelembe venni. Ekkor a felületek elválasztásának energiaszükséglete kiegészül a roncsolás terében bekövetkező szekunder őrlés energiaszükségletével. Ez nagyságrendekkel nagyobb, mint az elméleti érték.
- ❑ A mechanikai súrlódás a Coulomb-féle elmélet szerint számítható, az ék felülete és a kőzet a leváló forgács által összepréselődik és az így kialakult normálerő súrlódást vált ki. A súrlódási úthossz az ék előtolásával közel egyenlőnek vehető. A súrlódást a 3. fejezet szerinti módon vesszük figyelembe egy $\beta = [1 + \tan\theta/\mu]^{-1}$ tényezővel, ahol az ék hatása is figyelembe lett véve.
- ❑ A leváló kőzeforgács hajlításból eredő energia tárolása reverzibilis, azaz az energia a repedés előrehaladtával teljes mértékben a törési energia fedezésére fordítódik. A kőzeforgács ideálisan rugalmas, az ék által okozott M hajlítónyomaték terheli. A forgács vastagsága t , szélessége b , tehát $I = (bt^3)/12$. A forgács hajlított hossza a változik a repedés előrehaladtával, mind $T(e)$, $a(e)$ függvénykapcsolatok (mecha-

nikai munka) határozza meg a folyamatot. Az egyszerűség kedvéért a forgács végén ható koncentrált hajlítóerővel számolunk:

$$U_h = \int_{\eta=0}^a \frac{M(\eta)^2}{2EI} d\eta = \frac{1}{2} T\delta, \quad (19)$$

ahol δ a szabad vég lehajlása: $\delta = (Ta^3)/(3EI)$, tehát

$$U_h = \frac{1}{2} T\delta = \frac{T^2}{6EI} a^3. \quad (20)$$

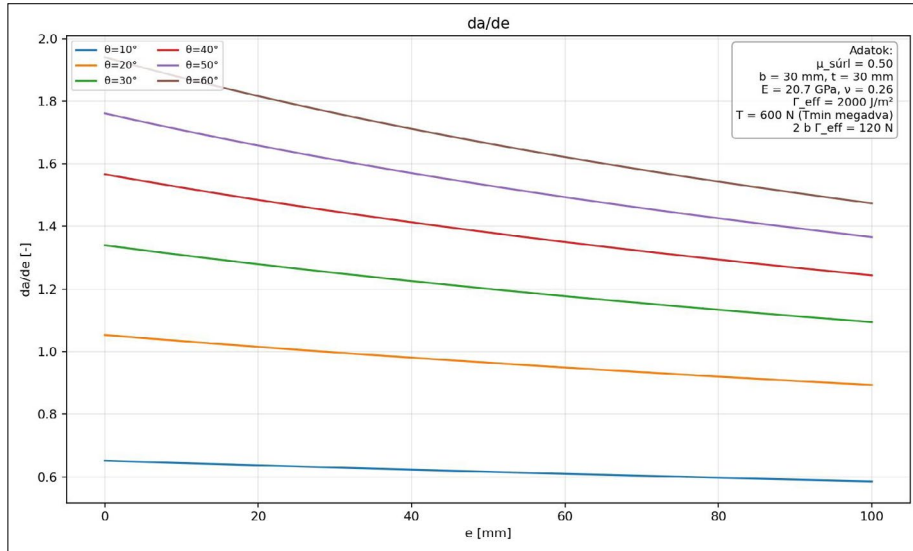
A Γ törési és őrlési energia és a bda elemi a törési felület fogalmát az 1. fejezetben már érintettük. A következőkben feltételezzük, hogy Γ a töréssel egészen állandó. A maradék alakváltozásokat Γ értékében vesszük figyelembe: $W_e = 0$. A kőzet tökéletesen homogén közeg, és a szilárdsági jellemzők irányfüggetlenek. A (10) feltételt tekintjük. Ebben a fázisban a következő események történhetnek: az ék behatol, és hajlítja a forgácsot, de még nincs törés, ekkor a repedés hosszának hatása elhanyagolható. Ez megfelel a (14) feltételnek. A repedés megindul és terjed, de megakad a -nál és a forgács hajlik, majd eléri a rugalmasan tárolt energia azt a szintet, amely az repedés felületi törési energiáját fedezi:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial U_h}{\partial a} + \frac{\partial W_s}{\partial a} + 2b\Gamma_{\text{eff}}. \quad (21)$$

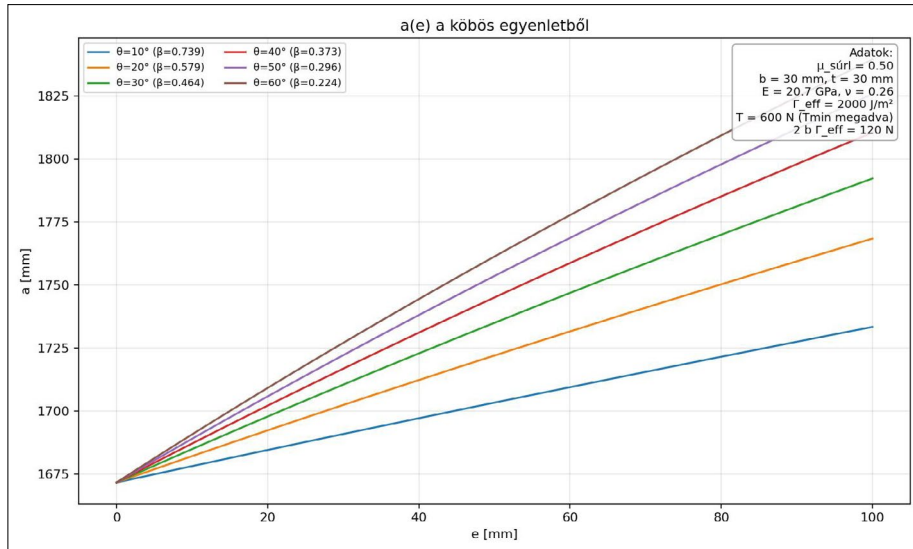
Ebből és (19), (20) alapján adódik:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[\int_{\zeta=0}^e T(\zeta) d\zeta \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{T^2}{6EI} a^3 \right) + \frac{\partial}{\partial a} \left[\int_{\zeta=0}^e \beta T(\zeta) d\zeta \right] + 2b\Gamma_{\text{eff}}. \quad (22)$$

Ezt rendezve kapjuk:



Az $f = da/de$ differenciál ábrázolása homokkő esetére az előtolás és az ékszög függvényében rugalmas energiátárolás esetére



Az $a(e)$ ábrázolása homokkő esetére az előtolás és az ékszög függvényében rugalmas energiátárolás esetére

$$\frac{da}{de} = \frac{(1-\beta)\hat{T}}{\frac{\hat{T}^2}{2EI}a^2 - 2b\Gamma_{\text{eff}}} \quad (23)$$

Az egyenlet megoldása az $a(e)$ függvény:

$$a^3 - \left(\frac{12b\Gamma_{\text{eff}}EI}{\hat{T}^2}\right)a - \left(\frac{6EI(1-\beta)}{\hat{T}}\right)e = 0 \quad (24)$$

7. A repedési pálya

7.1. A repedési pálya Sih-féle meghatározása

A repedés terjedésének leírása gazdag szakirodalmi anyaggal rendelkezik, ezek mindegyike a valós folyamatot és anyagmodellt egyszerűsítő elv szerinti idealizálásával jut el egy fizikai-matematikai leíráshoz.

Az ékkel történő közethasítás szempontjából értékes megoldások azok, amelyek számszerűen a legjobban megközelítik a mérési eredményeket: A Sih-féle [8, 9] energiasűrűségi (energiagyűrű) elmélet a repedés-csúcsban fellépő lokális energiasűrűségre alapsz. Lényege az, hogy a repedés mindig abba az irányba terjed, amelyikben a helyi energiasűrűség $S(r, \beta) = (1/2) \cdot \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$, minimális r sugárral éri el a kritikus értéket. A minimális sugárkör egyenértékű azzal, hogy a repedés akkor nő, amikor a repedésnövekedési irányban a helyi energianövekedés (G sűrűség) maximális.

A kritérium a terjedési irányra:

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial^2 \beta} > 0,$$

ahol

$$S(r, \theta) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij},$$

és δ_{ij} a Kronecker-delta, egységmátrix, amely indexek egyezésénél $i = j$, $\delta_{ij} = 1$.

Erőssége: a repedés mindenkor lokális irányát, így a repedésgörbe alakját is meghatározza:

$$S(r, \beta) = \frac{1}{2} \left[\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \sigma_{kk} \right].$$

A Sih-elmélet szerint a repedés abba az irányba terjed, ahol a $S(r, \beta) = S_c$ kritikus energiasűrűséget elérő gyűrű r_c sugara a legkisebb. Ebből levezethető, hogy ennek a geometriai feltételnek $r(\beta) = r_0 e^{k\beta}$ logaritmikusan spirál görbe felel meg. Korlátok: szinguláris repedéscsúcsot feltételez. A repedéscsúcs közelében ez szingulárisan nő ($\sigma_n \propto 1/\sqrt{r}$). A repedésgörbe csak lokális differenciál formában adódik.

7.2. A repedési pálya Griffith-féle elmélet szerinti meghatározásának egy lehetséges alkalmazása

Ékes hasítás közetekben tapasztalatok szerint kiválóan használható módszer [10–12]. Az előzőekben az ék által kiváltott anyagroncsolás, a repedés megindulásának körülményeit, végül a repedésterjedés Griffith-féle elméletre alapozott leírását végeztem el. A repedés-pálya számítását egy konkrét feladaton mutatom be. Alkalmazzuk a [8] elméletet a [2]-ben leírt Evans-féle feladatra úgy, hogy a törésgörbét meghatározzuk. A törésgörbe az $x = p_2, y = 0$ pontban kezdődik, ahol

$$p_2 \approx \frac{t}{\sqrt{3}} \cos \theta \sqrt{\frac{\sigma_{2\max}}{\sigma_{1\max}}}, \quad (25)$$

ahol $\sigma_{2\max}$ a repedésre merőleges húzószilárdsági, $\sigma_{1\max}$ a nyomószilárdsági küszöb. A repedés lokális iránya a maximum „hoop stress” kritériummal: $\partial \sigma_{\theta\theta} / \partial \theta = 0$, $\sigma_{\theta\theta} = \max$. megadható. Vegyes módus esetén számolunk a

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} D_I(x, y), \quad K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} D_{II}(x, y) \quad (26)$$

feszültségintenzitási faktorokkal [9, 10]. Az erőhatás a (3), (6), a mechanikai munka (4), (7) függvények írják le [1]. A ψ faktor a móduskeveredést írja le, ahol az ékhatás és a kötömb széle közelsége miatti kevert feszültségállapot áll fenn. Mivel csavaró igénybevétel kizárt (III), így kétmódusú a terhelés: „nyító” és „nyíró” mód érvényesül a repedés frontján. A p_2 utáni folyamat maga a terjedő repedés a forgács leválásáig. Ekkor a 4. fejezetben közölt módszer szerint járunk el, az itt ismertetett eljárás szerint (a levezetést itt nem közlöm). A feszültségintenzitási állandókra áll:

$$\psi(x, y) = \frac{K_{II}(x, y)}{K_I(x, y)}. \quad (27)$$

A repedés tovaterjedésének ϕ irányszöge az x tengelyhez képest, annak sorba fejtése után (az első két tagot vettem):

$$\phi = 2 \tan^{-1} \left[\frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\psi}}{4\psi} \right] \approx 2\psi - \frac{14}{3} \psi^3 + \frac{102}{5} \psi^5. \quad (28)$$

Ez minden pontban megfelel a repedésgörbe iránytangensének, ha a repedésgörbe a szabad felületnek tart:

$$\frac{dy}{dx} = 2\psi(x, y) - \frac{14}{3} \psi^3 + \frac{102}{5} \psi^5. \quad (29)$$

A görbe az A ($x = p_2, y = 0$) pontban indul, és a B ($x = p_2 + l, t$) pontban ér ki a szabad felületre. Az A pontban érinti az x tengelyt, $dy/dx = y' = 0$. A ψ függvény egy közelítése a repedéscsúcsra ható erőter eloszlása alapján, amit az ékerök (x, y) rendszerben értelmezett módusait átviszi a $(\zeta, \eta)^*$ rendszerbe. A (ζ, η) rendszer lokális, a repedésfront pontjához kötött, és a ζ tengely a repedésgörbe $y(x)$ érintője. A transzformáció:

$$\begin{bmatrix} T^* \\ R^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ R \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Vezessük be a repedés kezdőpontjához kötött $k(\mu, \theta) = T/R = (\mu + \tan \theta)/(1 - \mu \tan \theta)$ mechanikai áttételt leíró faktort, ahol R a (repedésre) normál (repedést szétnyitó), T az előtolóerő (repedést nyírással terhelő). Így

$$k^*(\zeta, \eta) = \frac{k + y'}{ky' + 1} \cdot \frac{\mu + \tan \theta}{1 - \mu \tan \theta}.$$

A $\psi(x, y)$ függvény leírásához szükség van még a $D(x, y)$ függvényekre az (I, II) módusokhoz. A megoldást a következő alakban keressük:

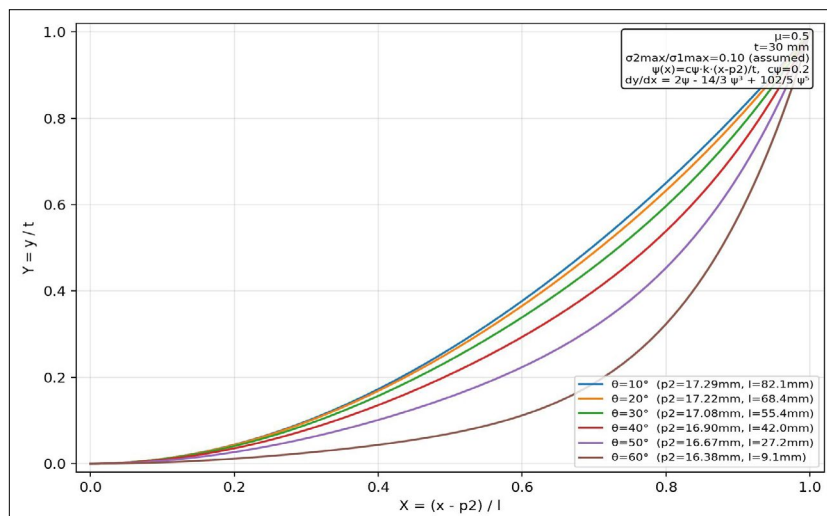
$$y' = F \left(\frac{k + y' D_{II}(x, y)}{1 - ky' D_I(x, y)} \right). \quad (31)$$

Az eredmények természetesen csak homogén és izotrop közetre alkalmazhatóak. Az egyenlet megoldása ezúton közelítő függvénnyel történik. A $D_{II}(x, y)/D_I(x, y)$ függvény ismerete itt, amin áll vagy bukik a számítás.

8. Diagramok homokkő hasításának esetére

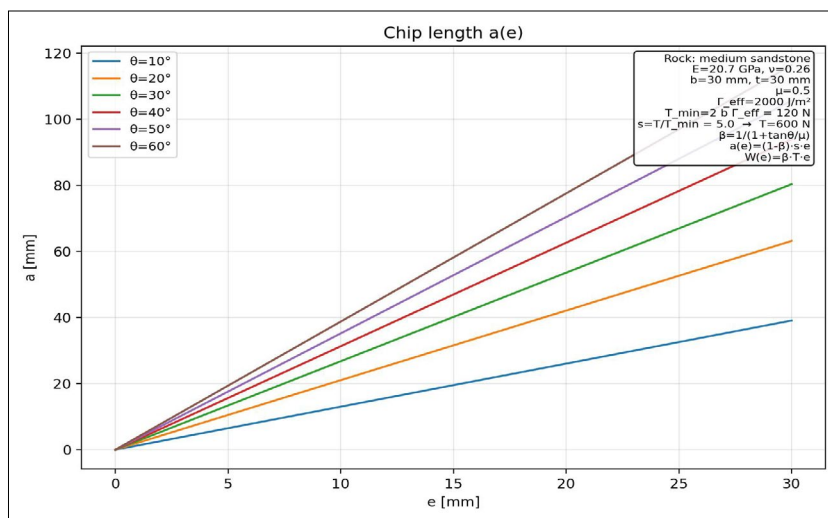
Az Evans-féle megközelítés szerinti eredmények: $D_{II}/D_I \approx c_\psi (x - p_2)/t$, a k tényezővel így $\psi(x, y) = k(\mu, \theta) c_\psi (x - p_2)/t$. A megoldás (25), (31) szerint $(dy/dx) \cdot p_2 = 0$:

8.1. Repedéspályák az ékszög függvényében



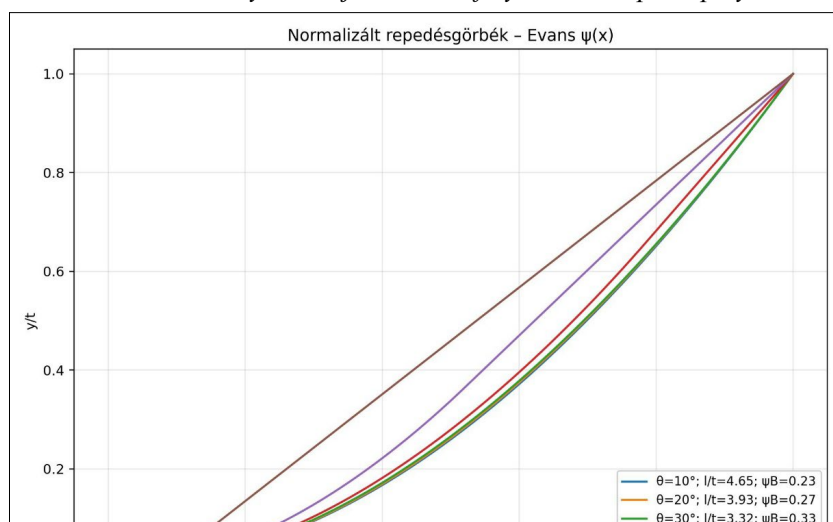
Repedéspályák az ékszög függvényében

8.2. A repedés hossza és az előtolás függvénykapcsolata a(e) az ékszög mint paraméter



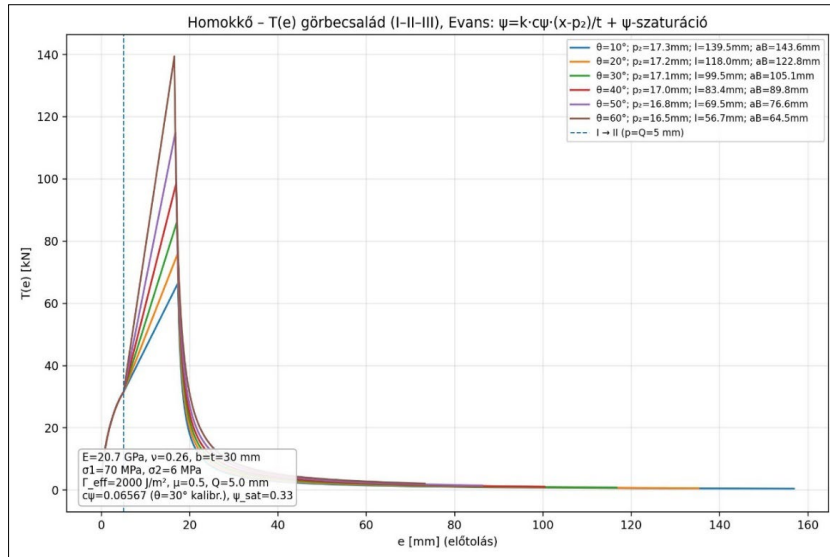
A repedés hossza és az előtolás

8.3. Az eredmények a teljes hasítási folyamatra: repedéspályák



Repedéspályák

8.4. Az eredmények a teljes hasítási folyamatra: Előtolóerő $T(e)$



Előtolóerő $T(e)$

Irodalom

- [1] Omaszta I. (2025): Kőzetek hasításának fizikai folyamatairól. *Bányászati és Kohászati Lapok*, 158(1), 46–53. <https://doi.org/10.63457/BKL.158.2025.1.5>
- [2] Omaszta I. (2024): Gondolatok Evans közethasítási modelljéről. *Bányászati és Kohászati Lapok*, 157(2), 19–24. Elérés forrás <https://ojs.mtak.hu/index.php/bkl/article/view/17106>
- [3] Linsbauer H. N., Tschegg E. K. (1986): Fracture energy determination of concrete with wedge splitting test. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5–6), 707–715.
- [4] Griffith A. A. (1921): The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 221, 163–198. <https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>
- [5] Bocsányi J. (1959): Vágathajtó és fejtőgépek vágófejeinek energetikai és forgácsolási kérdései. Kandidátusi értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest.
- [6] Evans A. A., Pomeroy C. D. (1966): The Strength, Fracture and Workability of Coal. Pergamon (Alapmű, sok későbbi képlet innen származtatott.)
- [7] Nishimatsu Y. (1972): The mechanics of rock cutting. *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 9, 261–270. (A „crushed zone + chip” bontás és erőösszetevők.) [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(72\)90027-7](https://doi.org/10.1016/0148-9062(72)90027-7)
- [8] Sih G. C. (1974): Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, 10, 305–321. <https://doi.org/10.1007/BF00035493>
- [9] Erdogan F., Sih G. C. (1963): On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. Basic Eng.*, 85, 519–525. <https://doi.org/10.1115/1.3656897>
- [10] Íréin G. R. (1957): Annales of stresses and strand near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24(3), 361–364. <https://doi.org/10.1115/1.4011547>
- [11] Roxborough F. F. (1973): Cutting rocks with picks. *The Mining Engineer* (picks vágás, kísérleti háttér)
- [12] Kou Shaoquan, Tan Xiangchun, Lindqvist P.-A. (1997): Modelling of excavation depth and fractures in rock caused by tool indentation. Luleå University of Technology, R-99-11.

A 75 éves város ünnepségsorozatának részeként

Országos Bányásznap Rendezvény

Komlón

Időpont: 2026. szeptember 3.