

A földtani paraméterek hatásterületének közvetett számítása

FÜST ANTAL¹

¹Szent István Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, Informatika Tanszék, H–2103 Gödöllő, Páter Károly út 1.

Indirect calculation of the range area for geological parameters

Abstract

The study presents a new calculation method of the range area for geological parameters. The bases of this method involve directional variances. The author initiates the idea of directional variance. With the help of this new method it may be possible to determine the range area in such cases when the calculation of directional semivariograms is impossible. The conditions for the application of this method require the joint presence of geometrical and zonal anisotropy in the examination of the geological parameter.

Keywords: range area, directional variance

Összefoglalás

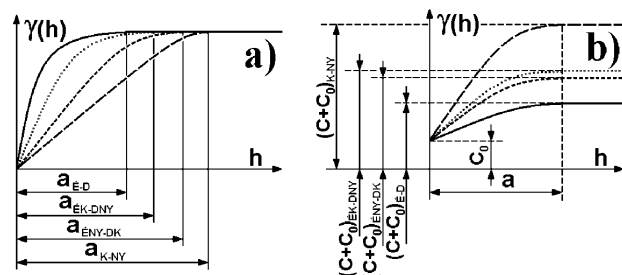
A tanulmány a paraméterek hatásterületének új, az iránymenti szórásnégyzetek felhasználásával történő számítási módszerét mutatja be. Ehhez bevezeti az iránymenti szórásnégyzet fogalmát. A javasolt módszer olyan esetekben is lehetővé teszi a hatásterület számítását, amikor az iránymenti félvariogramok bizonytalansága miatt a közvetlen számítás nem lehetséges. Az alkalmazás feltétele, hogy a paraméter változásában mind a geometriai mind a zonális anizotrópia érvényesüljön.

Tárgyszavak: hatásterület, iránymenti szórásnégyzet

Bevezetés

A földtani adatok feldolgozása során ritkán tapasztalható, de létező jelenség, hogy a vizsgált telepparaméter hatástávolsága független az iránytól, vagyis a hatásterülete kör. Ez esetben a paraméter vagy izotróp jellegű, vagy csak az anizotrópia zonális fajtája mutatható ki. Az esetek döntő hányadában viszont azt tapasztalhatjuk, hogy a regionális csapás irányában a paraméter hatástávolsága maximális, erre merőlegesen pedig minimális. Ilyenkor a különböző irányokban számolt hatástávolságokból számolt hatásterületet kiegyenlítő ellipszissel szokták helyettesíteni.

Általános tapasztalat, hogy ha egy ásványlelőhely-paraméter anizotróp jellegű, akkor a hatástávolság mellett a szórásnégyzet is irányonként változik, és nem egyezik meg a teljes területre jellemző szórásnégyzettel. Annak ellenére, hogy anizotrópia esetén ez a két paraméter együtt változik, a szakirodalomban (JOURNAL & HUIJBREGTS 1978, HOHN 1988) kétféle elméleti anizotrópiát különböztetnek meg (1. ábra). Az egyik a geometriai anizotrópia, a másik a zonális anizotrópia. Geometriai anizotrópáról akkor beszélünk, ha a



1. ábra. Az elméleti anizotrópia fajtái: a) geometriai anizotrópia, b) zonális anizotrópia

Figure 1. Types of anisotropy: a) geometrical anisotropy, b) zonal anisotropy.

É-D = N-S; K-Ny = E-W; ÉK-DNy = NE-SW; ENy-DK = NW-SE.

szórásnégyzet irányfüggetlen (1. ábra, a), és csak a hatástávolság függ az iránytól. Zonális anizotrópia esetében (1. ábra, b) a hatástávolság irányfüggetlen és csak a szórásnégyzet változik az irány függvényében.

Ha a paraméter vizsgálatakor geometriai anizotrópia nem mutatható ki, akkor a paraméter hatásterülete kör. Ha

csak geometriai anizotrópia, vagy zonális és geometriai együttesen mutatható ki, akkor a paraméter hatásterülete ellipszissel helyettesíthető.

Ha a mintaszám elégséges ahhoz, hogy az iránymenti félvariogramokat számítani lehessen, akkor a hatásterületi ellipszis közvetlenül számítható. Ha az iránymenti félvariogramok nem számíthatók megbízhatóan, de az iránymenti szórásnégyzetek még igen, akkor a hatásterületi ellipszist a szórásellipsziszből közvetetten vezethetjük le. A hatásterület közvetlen úton történő számítása a geostatistikai irodalomban megtalálható (FÜST 1997) így most ezzel nem kívánok foglalkozni.

Az iránymenti szórásnégyzet

Miként majd a későbbiekben látni fogjuk, a hatásterület közvetett számítására kidolgozott módszer az iránymenti szórásnégyzetekre épül, ezért a megoldás ismertetése előtt bevezetjük az iránymenti szórásnégyzet fogalmát.

A matematikai statisztikából ismert szórásnégyzet (σ^2), ha $Z(x_i)$ -vel jelöljük az egyes minta paraméterértékét és $\overline{Z(x)}$ -al a paraméter átlagértékét, a következő:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Z(x_i) - \overline{Z(x)}]^2$$

Belátható, hogy az így számolt szórásnégyzet független az iránytól, és nem más, mint a kutatási területre és a vizsgált paraméterre jellemző átlagos szórásnégyzet. Ezzel szemben az iránymenti szórásnégyzet számításánál, a számított érték valamely konkrét irányhoz kötődik. A számítás valamely irány vonatkozásában két lépésből áll. Az első lépésben számítjuk a mintavételek soronkénti (vagy oszloponkénti, illetőleg bármely felvett irány szerinti) szórásnégyzetet, majd a második lépésben képezzük ezek soronkénti vagy oszloponkénti, illetőleg más felvett irány szerinti mintaszámmal súlyozott átlagát. Az iránymenti szórásnégyzeteket, miként az iránymenti félvariogramokat is, általában É–D, K–Ny, ÉK–DNy és ÉNy–DK irányokban javasoljuk számítani.

Tételezzük fel, hogy például egy ásványlelőhely kutatása során, a produktív fúrásokban ismeretes a mért paraméter $Z(x_{ij})$ értéke, azon kívül fúrási soronként és oszloponként ismerjük a produktív fúrások n_{ij} számát. Ezek összege nem szükségszerűen egyezik meg a produktív fúrások területre jellemző összegével, hiszen ha egy sorban vagy oszlopban csak egy produktív fúrás van, akkor ott szórásnégyzet nem számítható, tehát a mintát az iránymenti szórásnégyzet számításából ki kell hagyni. A 2. ábra szabályos négyzethálózatba telepített fúrásokat mutat. Az ábra alapján az i és j irányú szórásnégyzetet a következő összefüggésekkel számítjuk:

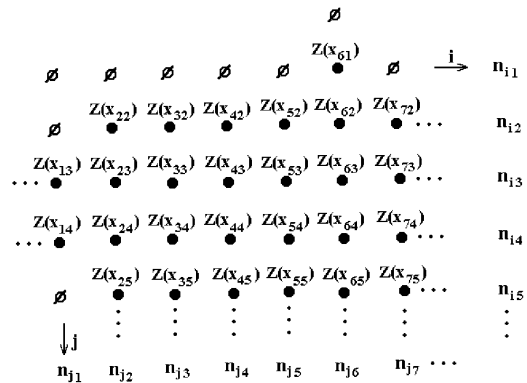
$$\sigma_i^2 = \frac{1}{\sum_j n_{ij}} \sum_{j=1}^{n_j} \left\{ n_{ij} \sum_{i=1}^{n_i} [Z(x_{ij}) - \overline{Z(x_j)}]^2 \right\},$$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{\sum_i n_{ij}} \sum_{i=1}^{n_i} \left\{ n_{ij} \sum_{j=1}^{n_j} [Z(x_{ij}) - \overline{Z(x_i)}]^2 \right\}.$$

Az összefüggésekben:

$\overline{Z(x_i)}$ és $\overline{Z(x_j)}$ — az i irányú j -edik illetve a j irányú i -edik sorban a paraméter átlagértéke,

n_i és n_j — az i irányú oszlopok és a j irányú fúrási sorok száma amelyekben 1-nél több produktív fúrás van.



2. ábra. Az iránymenti szórásnégyzet számításának elvi sémája

Figure 2. Theoretical scheme for calculation of directional variance

Legyenek például a mért paraméter értékek a következők (I. táblázat).

I. táblázat. Az 1. ábrán látható fúrások paraméterértékei

Table I. Parameter values according to the situation of Figure 1

i	1	2	3	4	5	6	7
j	Paraméter érték (m)						
1	-	-	-	-	-	1,4	-
2	-	1,8	1,6	1,8	1,7	2,1	2,8
3	3,1	2,8	2,2	2,3	2,1	2,4	3,0
4	3,0	2,7	2,6	2,8	2,5	2,7	3,2
5	-	1,9	2,4	2,9	2,7	2,7	3,3

Az i irányú szórásnégyzetek m^2 -ben soronként:

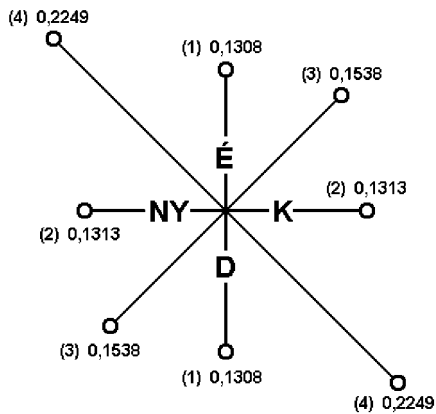
$$\begin{aligned} \sigma_{i1}^2 &= 0, \text{ (kimarad!)} & \sigma_{i2}^2 &= 0,1622 \\ \sigma_{i3}^2 &= 0,1396 & \sigma_{i4}^2 &= 0,0498 \\ & & \sigma_{i5}^2 &= 0,1858 \end{aligned}$$

Az irányra jellemző szórásnégyzet:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{6+7+7+6} (6 \cdot 0,1622 + 7 \cdot 0,1396 + \dots + 6 \cdot 0,1858) = 0,1313 \text{ m}^2$$

Hasonló módon számíthatjuk a j irányú szórásnégyzetet is, amely esetünkben $0,1308 \text{ m}^2$ -re adódott. Ha feltételezzük, hogy a 2. ábrán az i tengely keletre, a j tengely pedig délre mutat, akkor az adatokból számítható szórásnégyzetek a köztes irányokban a következők: ÉNy–DK irányban $0,2249 \text{ m}^2$, rá merőlegesen, ÉK–DNy irányban $0,1535 \text{ m}^2$. A számított értékeket grafikusan a 3. ábra mutatja.

Ha a fúrási hálózat szabálytalan, akkor a kutatási területre azonos szélességű oszlopokból és sorokból álló, É–D illetve Ny–K tájolású négyzethálózatot borítunk, majd az egyes sorokba, illetőleg oszlopokba eső fúrások adatainak felhasználásával számítjuk az oszloponkénti, illetőleg soronkénti szórásnégyzetet. A köztes irányok (ÉK–DNy és ÉNy–DK) szerinti szórásnégyzetek számításához először az eredetivel 45° -os szöget bezáró koordinátarendszerbe



3. ábra. A példa adataival számolt szórásnégyzet-értékek a különböző irányokban

Figure 3. Variances in different directions, calculated on the base of example data
É = N; D = S; K = E; Ny = W

II. táblázat. A hatástávolságok végpontjainak koordinátái EOV rendszerben

Table II. EOV coordinates of range endpoints in different directions

Pont jele	EOV koordináták	
	x	y
1	$\sigma^2_{\text{É-D}}$	0
2	0	$\sigma^2_{\text{K-Ny}}$
3	$(1/\sqrt{2}) \sigma^2_{\text{ÉK-DNy}}$	$(1/\sqrt{2}) \sigma^2_{\text{ÉK-DNy}}$
4	$(1/\sqrt{2}) \sigma^2_{\text{ÉNy-DK}}$	$(1/\sqrt{2}) \sigma^2_{\text{ÉNy-DK}}$

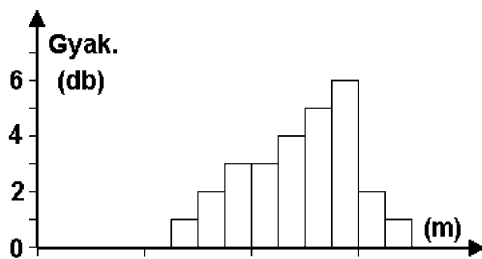
Az irányfüggetlen szórásnégyzet értéke a példa esetében 0,2601 m².

A 2. ábrán látható minta elhelyezkedés mellett, ha a minták távolsága mind *i*, mind *j* irányban egységesen 100 m, számítsuk ki az iránymenti félvariogramokat. Az 5. ábrán látható empirikus iránymenti félvariogramok azt mutatják, hogy az adott szituációban az iránymenti hatástávolságok megbízható számítására nincs lehetőség, ráadásul a félvariogramok trend jelenlétére utaló formát mutatnak.

transzformáljuk a fúrásokat, és ebben a rendszerben alakítjuk ki, az előbbivel azonos szélességű oszlopokat, illetőleg sávokat.

Megjegyezzük, hogy ha a paraméter eloszlása nem közelíthető normális eloszlással, akkor a szórásnégyzet számítását az adott eloszlástípus összefüggéseivel kell végezni, vagy előbb az eloszlást normalizálni kell.

Az I. táblázatban látható adatok hisztogramja jobbos aszimmetriát mutat (4. ábra). Ez a jelenség egyértelműen trend jelenlétére utal. Miként a későbbiekben látni fogjuk, ezt a feltevést a számított félvariogramok igazolják. Jelen esetben eltekintünk az aszimmetriától és a szórásnégyzetet a

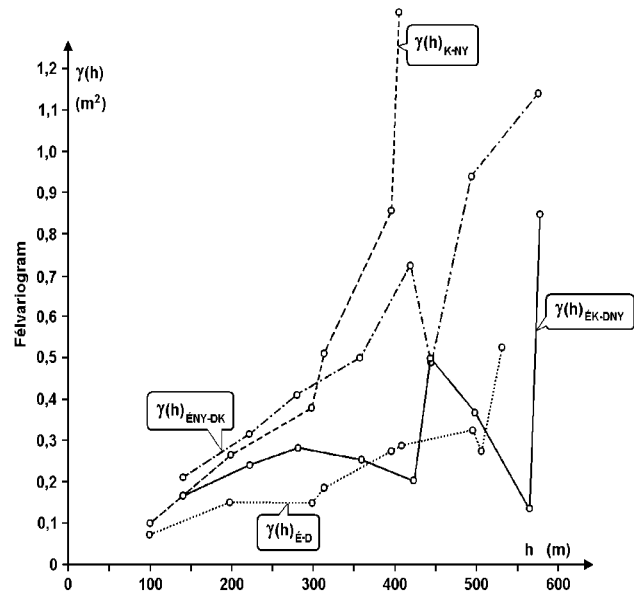


4. ábra. Az I. táblázatban található adatok gyakorisági hisztogramja

Figure 4. Frequency histogram for data in Table I
Gyak. = frequency; db = piece; m = metre

normális eloszlásnál használatos összefüggéssel számítjuk, ugyanakkor felhívjuk a figyelmet ennek látható következményeire.

A számítások eredményeként megkapjuk a szórásnégyzeteket az É-D, K-Ny, ÉK-DNy és ÉNy-DK irányokban. Ezeket, mint pontokat kell ábrázolni az Egységes Országos Vetületi Rendszer (EOV) koordináta rendszerében, melynek +x tengelye É-ra, +y tengelye pedig K-re mutat. Nevezzük az így kapott pontokat az előbb felírt sorrendben, 1, 2, 3 és 4 jelűnek. A pontok koordinátái a II. táblázatban láthatók.



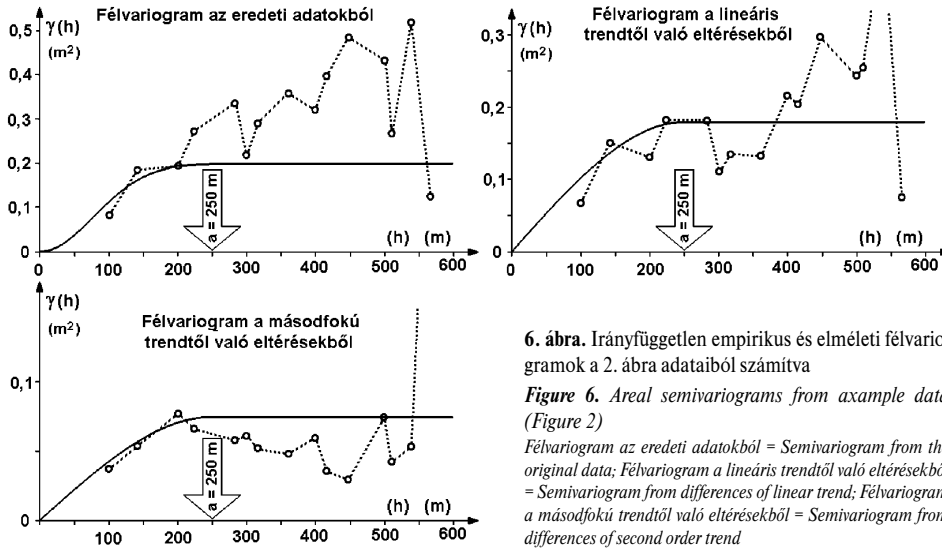
5. ábra. Empirikus iránymenti félvariogramok a 2. ábrán látható minta-elhelyezkedés mellett

Figure 5. Empirical directional semivariograms calculated from example data (Figure 2)

Félvariogram = Semivariogram; É-D = N-S; K-Ny = E-W; ÉK-DNy = NE-SW; ÉNy-DK = NW-SE

Ezzel szemben, mint láttuk, az iránymenti szórásnégyzetek számításának nincs akadálya. Az irányfüggetlen félvariogram számításánál azt tapasztaltuk, hogy a paraméter változásában trend jelenléte valószínűsíthető (6. ábra), ezért számítjuk a lineáris trendtől majd a másodfokú trendtől való eltérésekre is a félvariogramot.

A 6. ábra jól szemlélteti, hogy az elsőfokú trend leválasztása jól láthatóvá tette az első küszöböt, amelyre az elméleti függvényt illesztettük, míg a másodfokú trend leválasztása csak ezt a küszöböt hagyta meg. Érdekes



6. ábra. Irányfüggetlen empirikus és elméleti félvariogramok a 2. ábra adataiból számítva

Figure 6. Areal semivariograms from axample data (Figure 2)

Félvariogram az eredeti adatokból = Semivariogram from the original data; Félvariogram a lineáris trendtől való eltérésekből = Semivariogram from differences of linear trend; Félvariogram a másodfokú trendtől való eltérésekből = Semivariogram from differences of second order trend

megfigyelni, hogy mindez a hatástávolság értékét gyakorlatilag nem befolyásolta, az változatlanul 250 m körüli érték maradt. Megfigyelhető az is, hogy a trendleválasztás nélkül számolt félvariogram első kimutatható küszöbszintje, amely 0,2 m² körüli értékek adódott, kisebb, mint az irányfüggetlen szórásnégyzet (0,26 m²). Ez egyértelműen igazolja, hogy a félvariogram több küszöbszinttel rendelkezik.

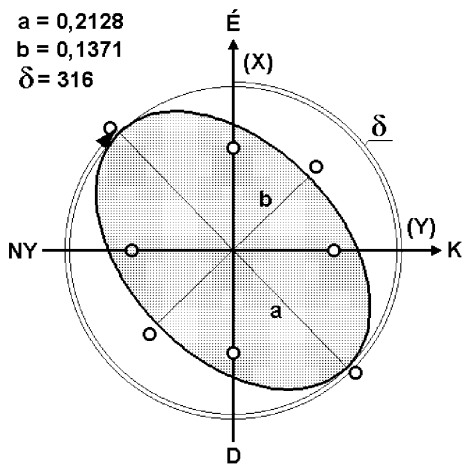
Kiindulva abból, hogy a legnagyobb változékonyságú irányban lesz a legkisebb a paraméter hatástávolsága, illetőleg az erre merőleges irányban a legnagyobb, belátható, hogy a szórásnégyzet ellipszise 90°-os szöget zár be a hatásterületi ellipszissel. Ugyanakkor módunk van számítani a területi félvariogram hatástávolságának (a) és az irányfüggetlen szórásnégyzetnek (σ²) a hányadosát:

$$c_{a,\sigma} = \frac{a}{\sigma^2}$$

A szórásnégyzet ellipszis számítása

A különböző irányokban számított hatástávolságok végpontjaira illeszthető ellipszis négyzetösszeg minimum elv alapján történő számítását a különböző szakirodalmak tartalmazzák (CZELLÁR, ZERGI 1982; FÜST 1997, 2002; FÜST et al. 2007), így ennek matematikai elméletével itt nem kívánok foglalkozni.

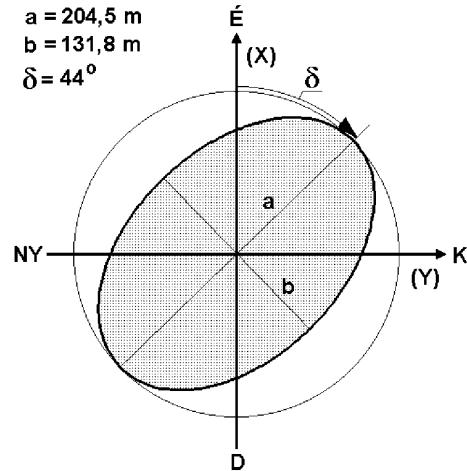
A 2. ábrán látható minta elhelyezkedés mellett, az I. táblázat adataival az iránymenti szórásnégyzetekből számolt ellipszis, a 7. ábrán látható.



7. ábra. A szórásnégyzetek ellipszise a példa adataiból számítva
Figure 7. Ellipse of directional variances calculated from example data
É = N; D = S; K = E; NY = W

Esetünkben az irányfüggetlen szórásnégyzet: 0,2601 m², a hatástávolság pedig 250 m. A kettő hányadosa: 961,2. Feltételezve, hogy ugyanez az arány áll fenn az iránymenti szórásnégyzet és az iránymenti hatástávolság között, a hatásterületi ellipszis fél nagytengelye és fél kistengelye pedig: a = 204,5 m, b = 131,8 m. A hatásterületi ellipszis képét a 8. ábra mutatja.

Megfigyelhető, hogy az így kapott ellipszis fél kis- és fél nagytengelye kisebb, mint az irányfüggetlen félvariogram hatástávolsága (6. ábra). Ez az eredmény arra enged



8. ábra. A hatásterületi ellipszis az adott példában
Figure 8. Ellipse of range area int he example
É = N; D = S; K = E; NY = W

következtetni, hogy a félvariogram kimutatott első küszöbe alatt kell lennie egy még kisebb hatástávolsággal rendelkező, az eredeti adatokból számolt empirikus félvariogramból nem kimutatható küszöbnek is. Az elsőfokú trendleválasztással számolt félvariogramnál ennek már mutatkoznak jelei. Ugyanakkor az is megfigyelhető, hogy egy lineáris típusú elméleti függvénnyel történő közelítés

kisebb hatástávolságot eredményezett volna mint 250 m. A bemutatott példa így nem csak a javasolt számítási metodika alkalmazhatóságát szemlélteti, hanem alkalmas arra is, hogy képet alkossunk a félvariogram függvénykonstrukciós problémáiról, melyek figyelmen kívül hagyása a krígélással előállított paramétertérképek hibájának növekedését eredményezheti.

Irodalom — References

- CZELLÁR A. & ZERGI I. 1982: Nagyméretű olajtartályok deformációinak meghatározása földi fotogrammetriai eljárással. — *Geodézia és Kartográfia* **3**, 193–196.
- FÜST A., 1997: Geostatistika. — Eötvös Kiadó, Budapest, 427 p.
- FÜST A., 2002: Természeti folyamatok geostatistikai modellezése, különös tekintettel az ásványlelőhelyek kutatására és értékelésére. — Akadémiai doktori értekezés, Budapest, 165 p.
- FÜST A., GEIGER, J., KOVÁCS, J. & UNGER, Z. 2007: Geomatematikai praktikum. — Jatepress, Szeged, megjelenés alatt.
- HOHN, M. E., 1988: Geostatistics and Petroleum Geology. — Van Nostrand Reinhold. New York, 265 p.
- JOURNEL, A. G., HUIJBREGTS, Ch. I., 1978: Mining Geostatistics. — Academic Press, London, New York, San Francisco, 600 p.
- Kézirat beérkezett: 2007. 07. 10.