

Természeti folyamatok négydimenziós krigelt modelljei

Kriged models of natural processes in 4D

FÜST Antal¹

(9 ábra, 7 táblázat)

Tárgyszavak: minták, négydimenziós modell, interpoláció, extrapoláció, előrejelzés
Keywords: samples, model in 4D, interpolation, extrapolation, forecasting

Abstract

The study summarises the most important steps of model-construction in 4D. It thus considers the different types of 4D sampling and the possibilities for using them. The process of kriging estimation in 3D is also examined along with the related forecasting methods (i.e. trend calculation and random processes). The presented methods are demonstrated with a case study.

Összefoglalás

A tanulmány összefoglalja a négydimenziós modell-alkotás legfontosabb lépéseit. Ennek során tárgyalja a minták fajtáit és felhasználási lehetőségeit, a térben és időben krigeléssel történő becslés folyamatát és az előrejelzési lehetőségeket (trendsámítás és sztochasztikus folyamatok). A bemutatott eljárást egy konkrét példa szemlélteti.

Bevezetés

A természeti folyamatok általában négy dimenzióban, a három dimenziós térben és időben zajlanak. A folyamatok intenzitását és mértékét számos tényező befolyásolja. Ezek hatása lehet trend- és véletlen jellegű. Amennyiben a folyamat vizsgálatára megfigyelő hálózatot építettünk ki, a megfigyelési adatokból előállítható a folyamat 4D-s modellje, a modell 3D-s metszetei térkép formájában ábrázolhatók és szükség szerint a várható viszonyok prognosztizálására is mód nyílik (FÜST & SZÉP 1979; FÜST 1991a, b, 1992, 1997, 2002; MOLNÁR & FÜST 2002, 2005; FÜST et al. 2005).

A természeti folyamatok modellezésére számos matematikai eljárás, így a speciálisan átalakított geostatistikai és geomatematikai módszerek is alkalmasak lehetnek (KRIGE 1987). A modelleknek általában két fő csoportját lehet elkülöníteni. Léteznek analitikus modellek (NOVÁKI [szerk.] 1990; TIEN-CHANG LEE 1998) és sztochasztikus modellek. A következőkben ez utóbbiakról adunk áttekintést.

A megfigyelési rendszer és a minták halmaza

Tételezzük fel, hogy valamely természeti folyamat (például a karsztvízszint-változás) vizsgálatára az érintett területen n számú, az országos térképezési

¹Szent István Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, Informatika Tanszék, H-2103 Gödöllő, Páter Károly út 1.

rendszerben értelmezett, ismert x, y, z koordinátájú megfigyelési helyet (mérő-állomást) létesítettünk. Ezeket, valamely paraméterre, tetszőleges időpontokban, méréseket végzünk. A mérés eredményét jelölje: $Z_{ij}(x_i, y_j, z_i, T_i)$ ($i = 1, 2 \dots n; j = 1, 2, \dots m_j$), ahol m_i – az i -edik mérési helyen végzett összes mérések száma. Az összes megfigyelések száma tehát:

$$n' = \sum_{i=1}^n m_i .$$

Tekintettel arra, hogy az i -edik mérési helyen a mintavétel nem feltétlenül azonos időközökben történt, továbbá a mintavétel ideje az n számú mérési helyen is eltérő lehet, a feldolgozáshoz az adathalmaz előzetes átdolgozása szükséges. Az egyszerűbb kezelhetőség érdekében vezessük be a következő jelöléseket: $Z_{ij}(x_i, y_j, z_i, T_i) = Z_{ijT}$; b_{ij} – az időbeli becslés-, c_{ij} – a z -irányú becslés súlytényezője valamely mérési helyen; a_{ij} – az adott z koordinátára és időpontra vonatkozó x, y síkbeli becslés súlytényezője.

Válmely x, y, z tér- és T időkoordinátával jellemzett helyre és időre vonatkozó becslés célszerűen három lépésben valósítható meg. Először minden mérési helyen, az azonos időpontra vonatkozó mintákból minden lehetséges időpontra becslést végzünk a kívánt z koordinátára. Becsüljük tehát a

$$Z_{izT}^* = \sum_{j=1}^{m_{iT}} c_{ij} Z_{ijT}$$

értéket, ahol m_{iT} – a becslésbe bevont minták száma: $m_{iT} \leq m_i$. Ezt követően minden mérési helyen a kívánt T időpontra vonatkozó becslést végezzük el:

$$Z_{iT}^* = \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} Z_{izT}^* ,$$

ahol m_i – a becslésbe ezúttal bevont, előzőleg már képzett (becsült) értékek száma: $m_i \leq m_i$. Ezt követően a kívánt x, y koordinátájú helyre végzünk becslést:

$$Z^* = \sum_{i=1}^N a_{ij} Z_{iT}^* ,$$

ahol N – a becslésbe bevont, T időpontra és z koordinátára becsült értékek száma: $N \leq n$. Az előbbiekből három lépésben elvégzett becslés egy egyenlettel is felírható, a következők szerint:

$$Z^* = \sum_{i=1}^N a_{ij} \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} \sum_{j=1}^{m_{iT}} c_{ij} Z_{ijT} .$$

Az együtthatókra vonatkozóan teljesülnek a

$$\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} = 1; \quad \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} = 1; \quad \sum_{i=1}^N a_{ij} = 1; \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m_{iT}} a_{ij} b_{ij} c_{ij} = 1$$

feltételek.

Ha a becsléshez valamely távolságfüggő egyszerű súlyozástechnikai eljárást (a mintatávolság valamely hatványának fordított értékével történő súlyozott átlag képzés) alkalmazunk, az együtthatók egyszerűen számíthatók. Ha viszont ennél pontosabb eredményt kívánunk és a becsléshez krigelést alkalmazunk, ehhez a következő három féle félvariogramra van szükség:

- megfigyelési helyenkénti, vagy célszerűen összesített (helyfüggetlen) z irányú $\gamma_T(z)$,
- egy hasonló módon képzett időbeli $\gamma(t)$ – továbbá
- egy z, t koordinátákhoz kötött $\gamma_{z,t}(h)$ félvariogram.

Ezek meghatározására a későbbiekben térünk ki.

Az időben és térben lejátszódó természeti folyamatot tehát egy olyan geomatematikai modellel írjuk le, amelyben feltételezzük, hogy az időbeli és térbeli változás stacionárius ugyanakkor a z irányú és az időbeli változás helyfüggetlen.

A négydimenziós modell előállításának folyamata

A természeti folyamat geostatistikai modellje pontmértető- és nem pontmértető mintákra épülhet. A függőleges értelmű és időbeli becslés lehet interpoláció és extrapoláció. Ez utóbbról az előjelezési módszerek kapcsán szólnunk. Interpoláció esetén a becslés történhet például krigeléssel, valamely egyszerű súlyozástechnikai eljárás alkalmazásával, spline függvénnyel és teljes illeszkedésű trenddel. Ezek közül a következőkben csak a krigeléssel foglalkozunk.

Függőleges értelmű és időbeli becslés krigeléssel, pontmértető mintákból

A feladat elvégzéséhez szükségünk van a paraméter függőleges értelmű változását leíró $\gamma_T(z)$, valamint az időbeli mozgást kifejező $\gamma(t)$ félvariogramra. Elvileg, ha $m_i \gg 0$, mindkét félvariogram megfigyelési helyenként is előállítható lenne, például z irányú esetre:

$$\gamma_{iT}(z) = \frac{1}{2M_{iT}(z)} \sum_{j=1}^{M_{iT}(z)} [Z_{ijt} - Z_{i(j+z)T}]^2,$$

ahol $M_{iT}(z)$ – az i -edik mérési helyen, valamely T időpontban, adott z -hez tartozó mintapárok száma. Tekintve, hogy $m_i < \infty$, praktikusági okokból célszerűbb mind a z irányú, mind a T szerinti félvariogramnál feltételezni, hogy a változás független az x, y koordinátáktól és a következő összefüggésekkel számolni:

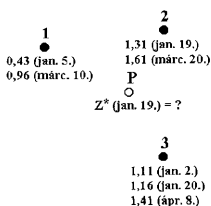
$$\gamma_T(z) = \frac{1}{2 \sum_{i=1}^n M_{iT}(z)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{M_{iT}(z)} [Z_{ijt} - Z_{i(j+z)T}]^2, \quad \gamma(t) = \frac{1}{2 \sum_{i=1}^n M_i(t)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{M_i(t)} [Z_{it}^* - Z_{i(t^*)}^*]^2,$$

ahol most $M_i(t)$ az adott i -edik mérési helyen, adott t -hez tartozó becsült értékpárok száma.

A $\gamma_T(z)$ és a $\gamma(t)$ empirikus félvariogramokra elméleti függvényt illesztve a $\gamma_T^*(z)$ és a $\gamma^*(t)$ elméleti félvariogramokat kapjuk. Ezt például $\gamma^*(t)$ esetén a következő határok között értelmezzük:

$$\begin{aligned} \gamma^*(t) &= 0 & \text{ha } t &= 0 \\ \gamma^*(t) &= f(t) & \text{ha } 0 < t \leq a_t \\ \gamma^*(t) &= (C + C_0)_t & \text{ha } t > a_t. \end{aligned}$$

Az összefüggésekben $f(t)$ – az empirikus félvariogram felszálló ágát közelítő elméleti függvény, a_t – a hatásidő, amely a hatástávolsággal analóg fogalom, $(C + C_0)_t$ – pedig az időbeli félvariogram küszöbszintje. A számítás menetét a következő példa (FÜST 2002) szemlélteti (1. ábra). Az ábra egy számos elemből álló mintavételi halmaz kiválasztott három elemének elhelyezkedését, a rájuk vonatkozó mérési adatokat és az adatgyűjtés időpontját mutatja.



1. ábra. A minták elhelyezkedése és a mért értékek az adott példában

Fig. 1. Location of samples, and the measured parameter values, in the example

A példában minden mért paraméter érték azonos z koordinátára vonatkozik. Végezzünk becslést az 1. ábrán látható P pontra, január 19-én! Az időbeli változást kifejező félvariogram felszálló ágának egyenlete:

$$\gamma^*(t) = 0,01 + 0,0005t; \text{ a hatásidő } a_t = 120 \text{ nap.}$$

Először számítjuk a paraméter értékét mindhárom mérési pontban jan. 19-én. Természetesen a 2. pontban nincs szükség számításra.

Az 1. mérési helyen a krigelési egyenlet a következő:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,07 & 0,038 & 1 \\ 0,038 & 0,07 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,053 \\ 0,035 \\ -0,01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,78125 \\ 0,21875 \\ -0,01 \end{bmatrix}.$$

A becsült érték tehát: $Z_{1(\text{jan. 19.})}^* = 0,78125 \cdot 0,43 + 0,21875 \cdot 0,96 = 0,5459$.

A 2. mérési helyen $Z_{2(\text{jan. 19.})}^* = 1,31$. A 3. mérési helyen jan. 19-re végzett becslés:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,07 & 0,051 & 0,012 & 1 \\ 0,051 & 0,07 & 0,021 & 1 \\ 0,012 & 0,021 & 0,07 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,0515 \\ 0,0595 \\ 0,0205 \\ -0,0017 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2699 \\ 0,6556 \\ 0,0745 \\ -0,0017 \end{bmatrix}$$

$Z_{3(\text{jan. 19.})}^* = 1,1651$.

A területi becsléshez az egyes távolság relációk a következők: $\bar{12} = 58$ m; $\bar{13} = 70$ m; $\bar{23} = 43$ m; $\bar{1P} = 53,5$ m; $\bar{2P} = 27,5$ m; $\bar{3P} = 19$ m. A terület egészére vonatkozó adatokból számolt, a területi félvariogram egyenlete jan. 19-én a következő:

$$\begin{aligned} \gamma_{z(\text{jan.19.})}(h) &= 0 & h &= 0 \\ \gamma_{z(\text{jan.19.})}(h) &= 0,6 \left[1,5 \frac{h}{80} - 0,5 \frac{h^3}{80^3} \right] & 0 < h &\leq a \\ \gamma_{z(\text{jan.19.})}(h) &= 0,6 & h &\geq a \end{aligned}$$

A krigeelési együtthatók számítására szolgáló egyenlet a **P** pontra:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,061823 & 0,013477 & 1 \\ 0,061823 & 0,6 & 0,162836 & 1 \\ 0,013477 & 0,162836 & 0,6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,087850 \\ 0,302811 \\ 0,390269 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,099524 \\ 0,344706 \\ 0,555770 \\ -0,000665 \end{bmatrix}$$

A becsült érték: $Z_{(\text{jan.19.})}^* = 1,1672$. A becslési szórás kizárólag a síkbeli becslésre vonatkozóan

$$\sigma_e^2 = 0,6 - \begin{bmatrix} 0,099524 & 0,344706 & 0,555770 & 0,000665 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,087850 \\ 0,302811 \\ 0,390269 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,2693; \quad \sigma_e = 0,519$$

Vegyük tekintetbe az időbeli becslés szórását is!

$$\sigma_{e1}^2 = 0,07 - \begin{bmatrix} 0,78125 & 0,21875 & 0,01 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,053 \\ 0,035 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,0109375; \quad \sigma_{e2}^2 = 0;$$

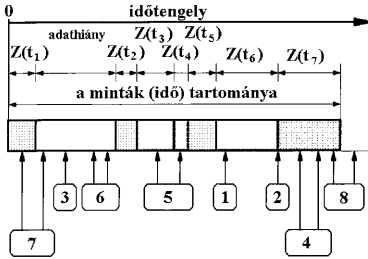
$$\sigma_{e3}^2 = 0,07 - \begin{bmatrix} 0,2699 & 0,6556 & 0,0745 & 0,0017 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,0515 \\ 0,0595 \\ 0,0205 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,0138647$$

Az átlagos időbeli szórásnégyzet: 0,0082674.

Az együttes becslési hiba: $\sigma_{eTH} = t \cdot \sqrt{0,2693 + 0,0082674} = t \cdot 0,527$. 95%-os valószínűségi szinten $\sigma_{eTH} = 1,054$.

Interpoláció nem pontmértű minták esetén

Ha a minták nem pontmértűek, hanem valamely mélységi (z-irányú) vagy időintervallumra vonatkoznak, akkor például intervallumbecslés esetén a 2. ábrán látható esetek fordulhatnak elő.



2. ábra. Lehetséges becslési szituációk nem pontmértű minták esetén

Fig. 2. Possible estimation situations in case of non point samples (időtengely = time axis, adathiány = shortage of data, a minták (idő) tartománya = zone (in time) of samples)

Feltételezve, hogy z irányban nincs változás, az interpolációt a következő módon célszerű végezni. Az 1. esetben pontmértű helyre vonatkozó becslést végzünk, és a pont valamely minta tartományán belül van. Ez esetben a becslült érték megegyezik annak a mintának a paraméter értékével, amelyben a pont található (esetünkben: $Z(t_6)$). A 2. eset szintén pontbecslés, de a pont két mintatartomány határára esik. Ez esetben a becslült érték a határ két oldalán lévő minta (az ábra szerint $Z(t_6)$ és $Z(t_7)$) paraméter értékének egyszerű számtani átlaga. Ha a határ egyik oldalán adathiány van, vagy a mért érték nulla, akkor a becslült érték a másik oldal mért paraméterértékével egyenlő. A 3. eset szintén pontbecslés, de a becslés helyén adathiány van. Ilyenkor a kívánt helyre szabályos pontkrigelést, vagy más súlyozásos pontbecslést végzünk. A becsléshez felhasznált mintákat a hatástávolság ismeretében, a becslési hely és a minta középpontok közötti távolság alapján válogatjuk össze. A 4. eset intervallumbecslés, de a becslési hely belesik valamely minta (az ábrán $Z(t_7)$) tartományába. Ilyenkor a becslült érték megegyezik a minta paraméterértékével. Az 5. eset szintén intervallumbecslés, de a becslési hely egynél több mintát (az ábrán $Z(t_3)$ és $Z(t_4)$) érint. Ilyenkor a becslült érték meghatározható intervallum-krigeléssel, de a minták igénybevett (idő)tartományával súlyozott átlagként is. A 6. eset olyan intervallumbecslés, amelynél a becslési hely adathiányos részre esik. Ilyenkor ugyanúgy járunk el mint a 3. esetben, azzal a különbséggel, hogy a becslés most intervallumra és nem pontra vonatkozik. A 7. esetben a becslési hely részben adathiányos területre esik. Ilyenkor, mint a 6. esetben, szabályos intervallumbecslést végzünk. A 8. esetben a becslési hely túlnyúlik a minták (idő)tartományán. Ilyenkor a becslült értéket vagy az előrejelzési módszerek valamelyikével számítjuk, vagy egyszerűen megegyezőnek vesszük a mintatartományba eső értékkel.

Adott időpontra vonatkozó becslés az x, y síkon

Az előbb leírt interpoláció révén lehetőség adódik arra, hogy a T időpontra becslült értékekből területi félvariogramot számítsunk az adott T időpontra. A félvariogram egyenlete:

$$\gamma_{zT}(h) = \frac{1}{2N_j(h)} \sum_{i=1}^{N_j(h)} [Z_{iT}^* - Z_{(i+h)T}^*]^2,$$

ahol $N_i(h)$ a mintapárok száma az adott T időpont és h távolság mellett. Ha az így számított $\gamma_{zT}(h)$ empirikus félvariogramra elméleti függvényt illesztünk, módunk van a paraméter krigeált térképének előállítására a z szintre és T időpontra vonatkozóan. Ha a z irányú becslés átlagos becslési hibája $\sigma_{z'}$, az időbeli $\sigma_{\bar{T}}$, a síkbeli becslés adott helyre vonatkozó becslési hibája pedig σ_e , akkor a z szintre, és T időpontra vonatkozó paraméter becslés becslési hibája: $\sigma_{\bar{T}zT} = t\sqrt{\sigma_{z'}^2 + \sigma_{\bar{T}}^2 + \sigma_e^2}$.

Prognóziskészítés

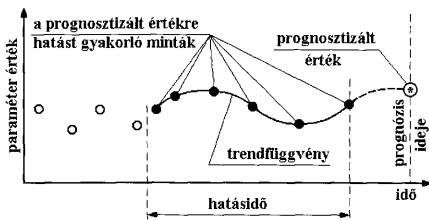
A természeti folyamatok 4 dimenziós modelljének előállítása során előfordulhat, hogy az interpoláció lehetősége nem áll fenn, így előrejelzést kell végezni. A prognóziskészítés elfogadható pontossággal, mind térben, mind időben megvalósítható. Így mód van arra, hogy előre jelezzük valamely paraméter térképet olyan időpontra, amelyben mérés még nem történt. A környezetvédelemben például a prognózis az x, y, z, T négydimenziós térben készül. A feladat azonban felbontható egy időbeli és egy térbeli prognózis előállítására. Ha az időbeli prognosztizálás lokálisan már megtörtént, a térbeli prognózis interpolációvá egyszerűsödik.

Az egydimenziós prognózis lehetőségek közül legegyszerűbben a trendszámítás kezelhető. A számított trend azonban célszerűen nem lehet teljesen illeszkedő, mert így olyan unduláció léphet fel, amely már nem tekinthető reálisnak. A számított trend feltételei között esetenként szerepeltetni kell azt a követelményt is, hogy az egyenletről számítható érték nem lehet negatív. A trendegyenlet együtthatóit a négyzetösszeg minimumfeltétellel határozzuk meg. Ennek részletezését I. később.

Előzetes vizsgálatokkal eldönthető, hogy az előrejelzett értékre mely minták gyakorolnak hatást (3. ábra). Időbeli prognózishoz tehát célszerűen a hatásidőn belüli mintákra vonatkozóan számolt trendfüggvényt célszerű felhasználni. Ez a trendfüggvény esetenként lehet teljesen illeszkedő is. Az itt számítható hatásidő nem tévesztendő össze az időbeli változást kifejező félvariogram hatásidejével. Az előrejelzés esetében számolt hatásidő ugyanis, az előrejelzés mint extrapoláció időbeli bázishosszát, míg a félvariogram hatásideje azt az időtartományt jelenti, amelyben a krigeáláshoz mint interpolációhoz felhasználható minták elhelyezkednek.

A paraméterek előrejelzése számszerűen és grafikusán történhet. A következőkben csak a számszerű előrejelzés fontosabb módszereivel foglalkozunk.

Az egy dimenzióban történő prognózis készítésére



3. ábra. A prognózisra hatást gyakoroló minták, a hatásidő értelmezése

Fig. 3. Samples have an effect on forecasting, interpretation of range in time (paraméter érték = parameter value, idő = time, a prognosztizált értékre hatást gyakoroló minták = samples affect for forecasted value, prognosztizált érték = forecasted value, trendfüggvény = trend function, prognózis ideje = forecasting time, hatásidő = range in time)

számos módszer ismeretes (BOX & JENKINS 1970; MAKRIDAKIS & WHEELWRIGHT 1978; MECSEKI et al. 1986, 1987; FÜST 2002.). Mielőtt azonban ezeket alkalmaznánk, számos vizsgálatot kell elvégeznünk. Vegyünk alapul egy olyan megfigyelési (mérési) sorozatot, amelynek szerkezetéről még semmit sem tudunk. Nem tudjuk azt sem, hogy a vizsgált sorozat teljesen véletlenszerű, vagy sem. Tegyük fel, hogy $Z_1 = \xi(1)$, $Z_2 = \xi(2)$, ..., $Z_{m_i} = \xi(n)$.

Első lépésben modellezzük ezt a sorozatot a $\xi(1)$, $\xi(2)$, ..., $\xi(n)$ sztochasztikus folyamattal! Először meg kell vizsgálnunk, hogy a folyamat „fehér zaj”-szerű-e. A nullhipotézis tehát:

$$H_0 : \text{A folyamat azonos eloszlású és korrelálatlan.}$$

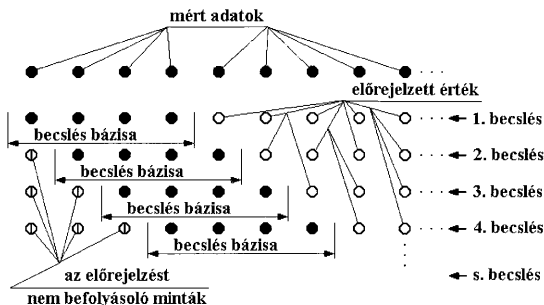
A nullhipotézist ellenőrizhetjük például a csúcspróbával, vagy a szomszédos pontok különbségének előjelen alapuló próbával. Ha a próba a nullhipotézist nem igazolta, azaz a vizsgált folyamat nem „fehér zaj”, akkor lehetséges, hogy attól csak egy $m_1(k)$ determinisztikus taggal, a polinomiális trenddel tér el, vagyis a folyamat a

$$\xi(k) = m_1(k) + \varepsilon(k)$$

modellel közelíthető, melyben $k = 1, 2, \dots, n$ értékeket vehet fel. A modellben $\varepsilon(k)$ jelenti a nulla várható értékű „fehér zaj”-t. Az $\varepsilon(k)$ differenciák sorozatát újra meg kell vizsgálni, hogy azok valóban „fehér zaj”-nak tekinthetők-e. Ha nem, akkor előfordulhat, hogy a polinomiális trendtől való eltérések még periodikus változást is mutatnak, azaz $\varepsilon(k) = m_2(k) + \varepsilon'(k)$. Így a folyamat a

$$\xi(k) = m_1(k) + m_2(k) + \varepsilon'(k)$$

modellel közelíthető, ahol $m_1(k)$ egy polinomiális, $m_2(k)$ pedig egy harmonikus trendet jelöl, $\varepsilon'(k)$ pedig már minden valószínűség szerint már „fehér zaj”-nak tekinthető. Megjegyezzük, hogy egyszerűbb prognózisok készítésénél általában nem lépnek tovább a trendfüggvényeknél, sőt esetenként csak a polinomiális



4. ábra. A próba előrejelzések sémája

Fig. 4. Scheme of test forecasting (mért adatok = measured data, előrejelzett érték = forecasted value, becslés = forecasting, becslés bázisa = base of forecasting, az előrejelzést nem befolyásoló minták = ineffectual samples for forecasting)

trendet használják. Mielőtt azonban a tényleges prognózis készítésre sor kerülne, meg kell vizsgálni, hogy az előrejelzést milyen bázison (hatásidő) kell végezni, és mekkora lehet az az (idő)távolság amelyre még érdemes előrejelezni (4. ábra). Egyszerű prognózis a hatásidőn belüli mintákra számolt trendfüggvényből készíthető. Ez a trendfüggvény lehet teljesen illeszkedő is. Az itt számítható hatásidő nem tévesztendő össze az időbeli változást kifejező félvariogram a_t hatásidejével.

Az előrejelzés hibásávja

Tételezzük fel, hogy a hatásidő ismeretében az előrejelzéshez m'_i ($m'_i < m_i$) számú, egyenközű mintát használunk fel. Próba előrejelzéseket végezve a már ismert paraméter értékű minták helyére (5. ábra), módunk van számítani az előrejelzés hibáját (FÜST 1991/a; FÜST et al. 1991). Legyen a becslt és a mért érték különbsége valamely t_e előrejelzési távolságra $\Delta_k(t_e)$.

Számítva a

$$\bar{\Delta}(t_e) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \Delta_k(t_e)$$

átlagot és a

$$\sigma_{\Delta}(t) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^s [\Delta_k(t_e) - \bar{\Delta}(t_e)]^2}{s}}$$

szórást, s számú előrejelzés t_e előrejelzési idő(távolság) mellett, adott valószínűségi szinten számítható a becslés hibásávja. A hibásáv alsó és felső határa a $Z^*(t)$ becslt érték alatt és fölött, adott t valószínűségi szinten a következő képlettel számítható:

$$Z^*(t) \pm \{ \bar{\Delta}(t_e) + t [\sigma_{\Delta}(t) + \bar{S}_t] \},$$

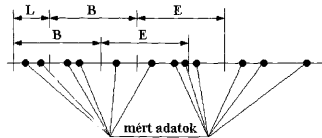
ahol \bar{S}_t a trendek S_t standard hibájának átlaga. Ha a trendek teljesen illeszkedők, akkor $S_{t_i} = 0$; $\bar{S}_t = 0$, így az előbbi összefüggés leegyszerűsödik:

$$Z^*(t) \pm [\bar{\Delta}(t_e) + t \sigma_{\Delta}(t)].$$

További egyszerűsödést eredményez, ha a paraméter változásának nincs határozott trendje. Ez esetben $\bar{\Delta}(t_e) \approx 0$, és ha a méréseinket sem terheli szabályos hiba:

$$Z^*(t) \pm t \sigma_{\Delta}(t).$$

Szabálytalan időközökben (vagy távolságokon) vett mintáknál az előrejelzés bázisának és hibásávjának meghatározása az 4. ábrán vázoltaktól eltérően történik (5. ábra).



5. ábra. Szabálytalan elhelyezkedésű minták hibásávjának meghatározási sémája

Fig. 5. Scheme of error zone determination in the case of irregularly located samples (mért adatok = measured data)

Jelölje a bázis szélességét B , annak kezdőpontja legyen x_{min} , végpontja x_{max} . Jelöljük ugyanakkor a bázis léptetésének hosszát L -el és az előrejelzési távolságot E -vel (5. ábra). Jelölje a B bázison belüli mintákra ráültetett, nem teljes illeszkedésű függvényt $f(x)$. Jelöljük továbbá a paraméter mért értékét y -al, az $f(x)$ függvényből számolt értéket pedig y' -vel. A B bázison túli mintákra, a bázis minden lehetséges helyzetében számítható az $y - y' = d$ differencia. Ezekre illesztünk egy egyenest, ennek egyenletét jelölje $f_i(x)$. Osszunk fel szabadon megválasztható intervallumokra az E előrejelzési távolságot. Az intervallum szélessége legyen: e . Vegyük először az x_{max} kezdőpontú és $(x_{max} + e)$ végpontú intervallumot, amelybe az alsó határt nem, de a felsőt bele számítjuk. Képezzük ebben az S_i standard hibát:

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y'_i - y_i)^2}{n}}$$

ahol most n , az intervallumban lévő tényleges mérések száma. Így a számolt standard hiba koordinátája: $x_{max} + e/2$. A következő, $(x_{max} + e$ és $x_{max} + 2e$ határokkal rendelkező) intervallumban ismét számíthatunk egy standard hibát, melynek koordinátája $[x_{max} + (3/2)e]$ stb.

Egy adott B bázis esetében rendelkezünk tehát egy konkrét $f(x)$ függvénnyel, mellyel előrejelzünk, és egy $f_i(x)$ egyenessel és intervallum közepekre vonatkozó standard hibával. Ez utóbbiakra illesztünk egy $f'_s(x) = ab^x$ alakú függvényt, különböző t valószínűségi szinteken. Az előrejelzés hibásávja tehát a következő $f_h(x)$ függvénnyel írható le:

$$f_h(x) = f(x) \pm [f_t(x) + f'_s(x)]$$

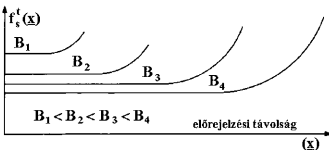
A számításokat most B növelésével ismételjük meg. Az eredményeket az $f'_s(x)$ -re vonatkozóan a 6. ábra mutatja. Az összefüggésekben x az előrejelzési távolságot jelöli.

A bázishossz növekedése a standard hibát csökkenti, de az ábrán az is megfigyelhető, hogy a standard hiba némileg független lesz az előrejelzési távolságtól. Az $f'_s(x) = ab^x$ alakú függvény érintőjének iránytangense nulla, ha $x = -\infty$, és végtelen, ha $x = \infty$. Jelöljük az iránytangens még megengedhető értékét w -vel. Így $ab^x \ln b = w$, tehát

$$x = \frac{\ln w - \ln a - \ln(\ln b)}{\ln b}$$

Az összefüggésből megkaphatjuk, hogy adott bázishossz mellett mekkora távolságra lehet előrejelezni.

Előrejelzés polinomiális trendfüggvénnyel
Ha az adatsor vizsgálata azt mutatja, hogy a folyamat nem „féhér zaj”, akkor



6. ábra. A bázishossz az előrejelzési távolság és a standard hiba összefüggése

Fig. 6. Connection among basis length, forecasting distance and standard deviation (előrejelzési távolság = forecasting distance)

még előfordulhat, hogy attól csak egy $m_1(k)$ determinisztikus taggal, a polinomiális trendfüggvénnyel tér el, vagyis a folyamat a $\xi(k) = m_1(k) + e(k)$ $k = 1, 2, \dots, n$ modellel közelíthető, ahol mint korábban láttuk, $e(k)$ a zérus várható értékű fehér zaj. A polinomiális trendet leggyakrabban lineáris, vagy esetleg másodfokú formában keressük, azaz

$$m_1(k) = a + \beta k \text{ vagy } m_1(k) = a + \beta k + \gamma k^2.$$

A trendfüggvény állandóit a négyzetösszeg minimum elv felhasználásával számítjuk, azaz:

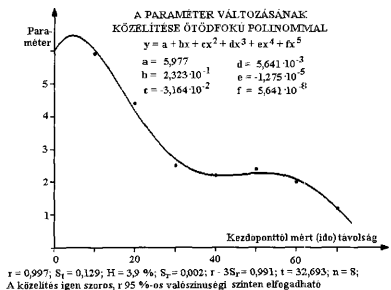
$$\sum_{k=1}^n [\xi(k) - m_1(k)]^2 = \min.$$

Az α , β , és γ együtthatók számítására másodfokú trend esetében a következő mátrix egyenlet szolgál:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum k & \sum k^2 \\ \sum k & \sum k^2 & \sum k^3 \\ \sum k^2 & \sum k^3 & \sum k^4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum \xi(k) \\ \sum k\xi(k) \\ \sum k^2\xi(k) \end{bmatrix}$$

A polinomiális trenddel történő előrejelzést a következő példa szemlélteti. A 2. táblázatban az 1. táblázat adataira számolt különböző polinomiális trendekkel kapott $Z^*(80)$ prognosztizált értékeket adjuk meg. A 7. ábrán az ötöd fokú polinommal való közelítést mutatjuk be.

Megjegyezzük, hogy nem célszerű teljesen illeszkedő trendfüggvény számítására törekedni. Helyesebb, ha a változás jellegét jól mutató függvényt használjuk fel a prognózishoz.



1. táblázat. Adatok a példabeli polinomiális trend számításához

Table 1. Data for calculation polynomial trend in the example

A minta száma	Kezdőponttól mért (idő) távolsága L (m)	Mért paraméter Érték M (m)	A mintaszáma	Kezdőponttól mért (idő) távolsága L (m)	Mért paraméter Érték M (m)
1	0	6,0	5	40	2,2
2	10	5,9	6	50	2,4
3	20	4,4	7	60	2,0
4	30	2,5	8	70	1,2

2. táblázat. A különböző fokszámú trendekkel kapott $Z^*(80)$ prognosztizált érték

Table 2. Prognosed values of $Z^*(80)$ calculated with different degree trend functions

Polinom fok-száma	$Z^*(80)$	Polinom fok-száma	$Z^*(80)$
1	0,143	5	-0,063
2	1,429	6	-7,415 $\cdot 10^{-4}$
3	1,525	7	10,967
4	-3,358	-	-

7. ábra. Az 1. táblázat adatainak közelítése ötöd fokú polinommal

Fig. 7. Polynomial trend function (5 degrees) on the basis of data, in the first table (a paraméter változásának közelítése ötöd fokú polinommal = the change of the parameter according to polynomial trend (5 degrees), kezdőponttól mért (idő) távolság = distance (in time) from the origo, a közelítés igen szoros, r 95%-os valószínűségi szinten elfogadható = the connection is very close, r acceptable on the 95% probability level)

Periódusvizsgálat

Előfordulhat, hogy a polinomiális trendtől való eltérések még periodikus változást is mutatnak, így a folyamat a

$$\xi(k) = m_1(k) + m_2(k) + \varepsilon'(k)$$

modellel közelíthető, ahol $m_2(k)$ a harmonikus trend és természetesen $\varepsilon(k) = m_2(k) + \varepsilon'(k)$. Tekintve, hogy $\varepsilon(k)$ várható értéke nulla, a harmonikus trend alakja:

$$m_2(k) = \sum_{i=1}^n \left(a_i \cdot \cos \frac{i\pi k}{L} + b_i \cdot \sin \frac{i\pi k}{L} \right),$$

ahol a_i és b_i a trendfüggvény együtthatói, L a mintasor félhossza, és n a minták száma. Ha a mintatávolságok azonosak, akkor az együtthatók számítására a következő összefüggések szolgálnak:

$$a_i = \frac{n}{2} \left[\frac{\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(n)}}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon(k) \cdot \cos \frac{i\pi k}{L} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n/2;$$

$$b_i = \frac{n}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon(k) \cdot \sin \frac{i\pi k}{L} \quad i = 1, 2, \dots, n/2.$$

Ha a mintatávolságok nem azonosak, akkor az együtthatók meghatározásához a négyzetösszeg minimum elvet használjuk. Előbb azonban célszerű bevezetni a következő helyettesítéseket:

$$\cos \frac{i\pi k}{L} = A_i; \quad \sin \frac{i\pi k}{L} = B_i; \quad \varepsilon(k) = y.$$

A feltételi egyenlet:

$$\sum \left[y - \left(\sum_i a_i A_i + \sum_i b_i B_i \right) \right]^2 = \min.,$$

melyet az a_i és b_i ismeretlenek szerint parciálisan deriválva, az együtthatókat a következő mátrix egyenletből kapjuk:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n/2} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum A_1 A_1 & \cdots & \sum A_{n/2} A_1 & \sum B_1 A_1 & \cdots & \sum B_{n/2} A_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum A_1 A_{n/2} & \cdots & \sum A_{n/2} A_{n/2} & \sum B_1 A_{n/2} & \cdots & \sum B_{n/2} A_{n/2} \\ \sum A_1 B_1 & \cdots & \sum A_{n/2} B_1 & \sum B_1 B_1 & \cdots & \sum B_{n/2} B_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum A_1 B_{n/2} & \cdots & \sum A_{n/2} B_{n/2} & \sum B_1 B_{n/2} & \cdots & \sum B_{n/2} B_{n/2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y A_1 \\ \vdots \\ \sum y A_{n/2} \\ \sum y B_1 \\ \vdots \\ \sum y B_{n/2} \end{bmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy a kiszámított polinomiális és harmonikus trendet célszerű megvizsgálni abból a szempontból, hogy a modellezett jelenség valóban mutathat-e ilyen jellegű változást. Ha erre lehetőség adódik, javasolható az eredmény ellenőrzése, például fel nem használt adatsorokkal.

Előrejelzés a sztochasztikus folyamatok elmélete alapján

Egyenközű minták esetén mind interpolációra, mind extrapolációra alkalmazhatjuk a sztochasztikus folyamatok elméletét. Ilyenkor a vizsgált jelenséget megfelelő pontossággal a valószínűségi változóknak csak végtelen sokaságával írhatjuk le. Ezekben az esetekben a valószínűségi változókat t paraméterrel látjuk el: $\xi(t)t \in T$, ahol T a t paraméterek összessége, amelyek igen gyakran az időt jelölik.

A $\xi(k)$, $k = 0, \pm 1, \dots$ sztochasztikus folyamatot m -ed rendű autoregresszív folyamatnak nevezzük, ha $\xi(k) = a_1 \xi(k-1) + \dots + a_m \xi(k-m) + \varepsilon(k)$, ahol $\varepsilon(k)$ a „fehér zaj”, a_1, a_2, \dots, a_m pedig konstans vektorok. Az m -ed rendű autoregresszív folyamatot $AR(m)$ -mel jelöljük (JENKINS & WATTS 1968; BOX & JENKINS 1970; KENDALL 1981; DÉVÉNYI & GULYÁS 1988; FÜST 2002). Az autoregresszív folyamat együtthatóit a legkisebb négyzetek módszerével becsüljük. Ha a folyamat várható értéke (μ) nem nulla, akkor ennek becslése ($\hat{\mu}$) a következő összefüggéssel történik:

$$\hat{\mu} = \frac{\overline{\xi(1)} + a_1 \overline{\xi(2)} + \dots + \overline{\xi(m)}}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_m}, \text{ ahol}$$

$$\overline{\xi(j+1)} = \frac{1}{n-m} \sum_{k=m+1-j}^{n-j} \xi(k) \quad j = 0, 1, 2, \dots, (m-1).$$

Ha $\mu \cong \hat{\mu}$ ismert, akkor adataink eleve centrálhatók, így a feltételei egyenlet leegyszerűsödik. Például ha $AR(1)$ folyamatról van szó, vagyis $m=1$, akkor

$$\hat{\mu} \approx \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \xi(k) \quad \text{és} \quad a = \frac{\sum \xi(k) \xi(k-1)}{\sum [\xi(k-1)]^2}.$$

Másodfokú autoregresszív folyamatnál, $AR(2)$

$$\hat{\mu} \approx \frac{1}{n-2} \sum_{k=3}^n \xi(k) \quad \text{és az együtthatók:}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum [\xi(k-1)]^2 & \sum [\xi(k-1)\xi(k-2)] \\ \sum [\xi(k-1)\xi(k-2)] & \sum [\xi(k-2)]^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum \xi(k)\xi(k-1) \\ \sum \xi(k)\xi(k-2) \end{bmatrix}.$$

$AR(3)$ folyamatnál:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum [\xi(k-1)]^2 & \sum [\xi(k-1)\xi(k-2)] & \sum [\xi(k-1)\xi(k-3)] \\ \sum [\xi(k-1)\xi(k-2)] & \sum [\xi(k-2)]^2 & \sum [\xi(k-2)\xi(k-3)] \\ \sum [\xi(k-1)\xi(k-3)] & \sum [\xi(k-2)\xi(k-3)] & \sum [\xi(k-3)]^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum [\xi(k)\xi(k-1)] \\ \sum [\xi(k)\xi(k-2)] \\ \sum [\xi(k)\xi(k-3)] \end{bmatrix}.$$

A megoldást számszerűen a következő példa szemlélteti.

Centráljuk az 1. táblázatban lévő adatokat, majd először tekintsük őket AR(1) folyamatnak. Az adatok átlagértéke: $\bar{\xi}(k) = 3,325$. A centrálás nem más mint a mért és az átlagérték különbségének képzése.

$$a = \frac{14,779375}{19,499375} = 0,7579409596.$$

Eredményeink a 3. táblázatban láthatók.

3. táblázat. Centrált értékek a példában, és az AR(1) folyamat számítása

Table 3. Centralized values in the example and calculation of AR(1) process

k	$\xi(k) - \bar{\xi}(k)$	$\xi(k)\xi(k-1)$	$[\xi(k-1)]^2$	$\xi(k-1) - \bar{\xi}(k)$	$a[\xi(k-1) - \bar{\xi}(k)]$	$\varepsilon(k)$
1	2,675				2,675	0,000
2	2,575	6,888125	7,155625	2,675	2,028	0,548
3	1,075	2,768125	6,630625	2,575	1,952	-0,877
4	-0,825	-0,886875	1,155625	1,075	0,815	-1,640
5	-1,125	0,928125	0,680625	-0,825	-0,625	-0,500
6	-0,925	1,040625	1,265625	-1,125	-0,853	-0,072
7	-1,325	1,225625	0,855625	-0,925	-0,701	-0,624
8	-2,125	2,815625	1,755625	-1,325	-1,004	-1,121
Σ		14,779375	19,499375			

Tekintsük most a centrált értékeket AR(1) folyamatnak (4. táblázat).

4. táblázat. Az AR(2) folyamat számítása az adott példában

Table 4. Calculation of AR(2) process in the example

k	$[\xi(k-1)]^2$	$[\xi(k-2)]^2$	$\xi(k-1)\xi(k-2)$	$\xi(k)\xi(k-1)$	$\xi(k)\xi(k-2)$	$a_1[\xi(k-1) - \bar{\xi}(k)] + a_2[\xi(k-2) - \bar{\xi}(k)]$	$\varepsilon(k)$
1						2,675	0,000
2	7,155625			6,888125		2,575	0,000
3	6,630625	7,155625	6,888125	2,768125	2,875625	1,389	-0,314
4	1,155625	6,630625	2,768125	-0,886875	-2,124375	-0,162	-0,663
5	0,680625	1,155625	-0,886875	0,928125	-1,209375	-1,432	0,307
6	1,265625	0,680625	0,928125	1,040625	0,763125	-0,784	-0,141
7	0,855625	1,265625	1,040625	1,225625	1,490625	-0,733	-0,592
8	1,755625	0,855625	1,225625	2,815625	1,965625	-0,315	-1,810
Σ	19,499375	17,743750	11,96375	14,779375	3,761250		

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19,499375 & 11,963750 \\ 11,963750 & 17,743750 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 14,779375 \\ 3,761250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,071 \\ -0,510 \end{bmatrix}$$

Végezzünk előrejelzést az AR(1) és az AR(2) egyenlettel (5. táblázat)!

5. táblázat. Előrejelzett értékek az AR(1) és az AR(2) folyamat adataiból
 Table 5. Prognosed values on the basis of AR(1) and AR(2) process

k	Előrejelzett érték		k	Előrejelzett érték	
	AR(1) szerint	AR(2) szerint		AR(1) szerint	AR(2) szerint
9	-1,611	-1,600	13	-0,532	0,254
10	-1,221	-0,630	14	-0,403	0,185
11	-0,925	-0,141	15	-0,305	0,069
12	-0,701	0,170	16	-0,231	0,020

Ha $k \rightarrow \infty$, az előrejelzett érték tart a nullához. Az előrejelzés hibásávja függetlenül az előrejelzési távolságtól, az $\varepsilon(k)$ értékek szórásával jelölhető ki. Ez az AR(1) folyamatnál; $t \cdot 0,64846$ az AR(2) folyamatnál $t \cdot 0,61125$.

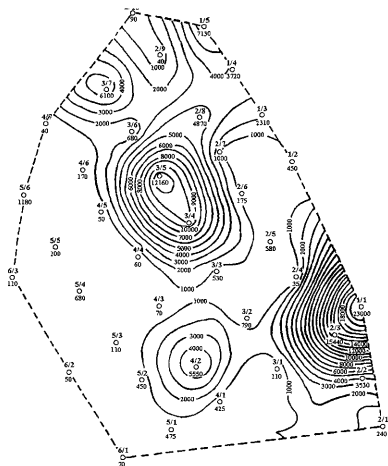
Előrejelzés két dimenzióban

Két dimenzióban elsődlegesen a különböző polinomiális és egyéb trendszámítások javasolhatók. Bármilyen előrejelzési módszert is alkalmazunk azonban, tisztában kell lennünk azzal, hogy minél kisebb az előrejelzés bázisa, illetőleg minél nagyobb az előrejelzési távolság, a prognózis annál bizonytalanabb. Tapasztalataink szerint a bázisszélesség 1/3-át meghaladó előrejelzések megbízhatósága már kétséges, és a pejoratív értelemben használt jóslás területére vezetnek.

Egy szénhidrogén termékvezeték törése kapcsán keletkezett talajszennyeződés vizsgálata (esettanulmány)

Egy szénhidrogén termékvezeték törését észlelve, az érintett csővezeték szakaszt kiiktatták, és azonnali kutatást kezdtek a törés helyének és a szennyeződés mértékének meghatározására. A szennyeződés feltételezett területét a 8. ábrán látható határvonal mentén körülárkolták és a vezetékkel párhuzamosan 6 fúrási sort jelöltek ki, melyeken viszonylag egyenletes sűrűségben 38 db 1-2 m mély talajfúrást mélyítettek. A 2. számú fúrási sort közvetlenül a

8. ábra. Szénhidrogén vezeték törése kapcsán keletkezett szennyezés krigeált térképe 1,25 m mélységben, július 1-én



vezeték mellé telepítették. A fúrások helyét a 9. ábra mutatja. Az egyes fúrásokban a felszíntől számított különböző mélységekben és időpontokban mérték a szennyződés mértékét. Példaképpen a 6. táblázatban, a 3/5 számú, fúrásban 1,25 m mélységben mért szennyződési adatokat tüntettük fel.

6. táblázat. A példában szereplő 3/5 számú fúrás mérési adatai
Table 6. Parameter values of 3/5 borehole

A mérés ideje		A szennyződés mértéke (mg/kg)
dátum szerint	az időskálán (nap)	
jún. 3.	3	10642
jún. 18.	18	11148
júl. 2.	32	12247
júl. 9.	39	12193
aug. 23.	84	12168

hogy fúrásonkénti félvariogramokat számítsunk, ezért átlagos félvariogramok számítására kényszerültünk. Például az időbeli változást leíró helytől független elméleti félvariogram egyenletét mutatjuk be:

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= 0 & h &= 0 \\ \gamma(h) &= 500[1,5(h/23) - 0,5(h/23)^3] + 12 & 0 < h \leq 23 \\ \gamma(h) &= 512 & h &\geq 23 \end{aligned}$$

A következőkben az 1,25 m mélységre és július 1-i állapotra elvégzett mérések és számítások néhány részeredményét szemléltetjük. Néhány fúrás nem érte el az 1,25 m mélységet, így azokban nem voltak ebből a mélységből származó mérési adatok. Például az 1/1 számú fúrásban július elsején a 7. táblázatban található adatokat mérték.

7. táblázat. Az 1/1 számú fúrás mérési adatai július 1-én
Table 7. Parameter data of 1/1 bore hole in 1st June

Felszíntől számított mélység x (m)	Szennyződés y (mg/kg)
0,1	2108
0,2	2650
0,4	2000
0,7	1100
1,0	3507

Tekintettel arra, hogy 1 m-nél mélyebben mintavétel nem történt, a meglévő adatokból előrejelzést kellett végezni a felszíntől számított 1,25 m-re. Az előrejelzéshez a következő, polinomiális és harmonikus tagokat is tartalmazó egyenletet alkalmaztuk:

$$y = 1777,014 + 10600x - 42640x^2 + 38380x^3 + 88,52 \cos(\pi x/0,5) - 238,3 \sin(\pi x/0,5) - 185,7 \cos(2\pi x/0,5) + 234,0 \sin(2\pi x/0,5)$$

Az előrejelzett érték 1,25 m mélységre, 23 000 mg/kg. Míután minden fúrásban vagy mérésből, vagy számításból rendelkezésünkre

állt július elsején a szennyeződés mértéke 1,25 m mélységben, mód nyílt a területi változást mutató félvariogram számítására. Az empirikus félvariogram képét és adatait a 9. ábra szemlélteti.

A hatásterületi ellipszist megszerkesztve azt tapasztaltuk, hogy annak nagytengelye csaknem párhuzamos a vezetékkel. A fél kis- és fél nagytengely hosszának szorzata 1909 m², míg a 8. ábrán látható félvariogram hatástávolságának négyzete 2025 m². A két adat jó egyezést mutat, így a hatásterületi ellipszis elfogadható. A szennyeződés 1,25 mélységre és július 1. állapotra vonatkozó krigeált térképét a 9. ábra szemlélteti. Az adott esetben a homorú félvariogram nem okozott kiütő krigeálási eredményeket.

A 9. ábrán látható szennyezés térkép az számított 4 dimenziós modell egy 2 dimenziós metszete, tekintettel arra, hogy kötött idő és mélység koordináta mellett, a szennyeződés mértékét az x és y koordináták függvényében szemlélteti.

Az elvégzett modellezési vizsgálatok alapján a következőket állapíthattuk meg.

— A vezeték nem egy, hanem két helyen hibásodott meg. (Ezt mutatja a 8. ábrán látható két maximum.)

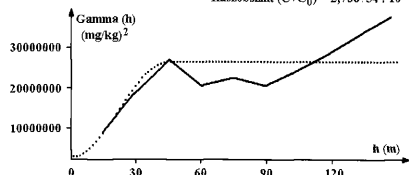
— A két meghibásodási pont közül a K-i oldalon lévő a súlyosabb.

— A szennyeződés már kilépett a körülárkolt területből.

Megjegyezzük, hogy a krigeálás — miként ezt az előbbi példa is mutatja — elsődlegesen a hiányzó adatok pótlására alkalmas, a szennyezőanyag-terjedés időbeli változásának modellezésére viszont a transzport szimuláció tűnik kedvezőbb eljárásnak.

SZÉNHYDROGÉN VEZETÉK szennyezőanyag tart. 1.25 m mélységben
 Szinuszf. tip. félvariogram ($C_0 > 0$)

$\Gamma(h) = C/2\{1 + \sin[\pi(h-3/2)/a]\} + C_0$
 Hatástávolság (a) = 45.00 m
 Szórásnégyzet = $2,41623 \cdot 10^7$
 Küszöbszint ($C+C_0$) = $2,736754 \cdot 10^7$



$C = 2,65513 \cdot 10^7$ $C_0 = 816241,7$ $r = 0,988$ $St = 1298178$ $H = 7,01\%$
 A tapasztalati félvariogram Matheron-féle

9. ábra. Szénhidrogén vezeték törése kapcsán keletkezett szennyezés területi félvariogramja 1,25 m mélységben, július 1-én

Fig. 9. Areal semivariogram of a pollution in 1.25 m depth at 1th of July in connection with a breaking of a hydrocarbon pipeline (szénhidrogén vezeték = hydrocarbon pipeline, szennyezőanyag tart. 1.25 m mélységben = pollution content in 1.25 m depth, szinuszf. tip. félvariogram = semivariogram, sinus function type, hatástávolság = range, szórásnégyzet = variation, küszöbszint = sill, a tapasztalati félvariogram Matheron-féle = the empirical semivariogram Matheron type)

Irodalom — References

- BOX, G. E. P & JENKINS, G. M. 1970: Time Series Analysis Forecasting and Control. — Holden-Day, San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam. 553 p.
- DÉVÉNYI D. & GULYÁS O. 1988: Matematikai statisztikai módszerek a meteorológiában. — Tankönyvkiadó, Budapest, 443 p.
- FÜST, A. & SZÉP, I. 1979: Prognozirovanie parametrov mesztorozsdenij poleznüh iszkopaemüh. — Marksejderszkoje delo v szocialiszticeszkih stranah. Vüpuszk 8. Leningrad, pp. 81–91.
- FÜST A. 1991a: Környezetszennyezési folyamatok térben és időben történő geomatematikai modellezése. — Tanulmány, KBFI, Budapest, 34 p.

- FÜST A. 1991b: A környezetvédelem geostatistikai modellje. — XXX. Bányamérő továbbképző és Tapasztalatsere (ECOPLAN Kft.) kiadványa, Gyöngyös, 8 p.
- FÜST A., KOVÁCS J., KUN A., KOCZKA GY., LESTÁK F. & WIDDER, A. 1991: A Lukács-fürdő Boltív-Malomtó forrás 1966–1989 évi mennyiségi és minőségi adatainak geostatistikai feldolgozása. — Oktatási segédlet, ELTE–KBFI Budapest, 112 p.
- FÜST, A., 1992: Geostatistical Model of Environmental Pollution. — *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.* 27/2–4, pp. 389–397.
- FÜST A. 1997: Geostatistika. — Eötvös Kiadó, Budapest, 427 p.
- FÜST A. 2002: Természeti folyamatok geostatistikai modellezése, különös tekintettel az ásványlelőhelyek kutatására és értékelésére. — Akadémiai doktori értekezés, Budapest, 117 p.
- FÜST A. 2005: Négydimenziós természeti folyamatok térképezése. — XLIV. Bányamérő Továbbképző és Tapasztalatsere kiadványa, Salgótarján, 2005. május 18–20. pp. 8/45–11/45.
- FÜST A., KOVÁCS J. & KOVÁCSNÉ SZÉKELY I. 2005: Négydimenziós geostatistikai modellek a földtanban és a környezetvédelemben. (Összefoglalás). — VII. Bányászati-Kohászati-Földtani Konferencia kiadványa. Nagyvárad 2005. május 31 – április 3. p. 1.
- JENKINS, G. M. & WATTS, D. G. 1968: Spectral Analysis and its Applications. — Holden-Day, San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam, 525 p.
- KENDALL, M. 1981: Vremennüje rjádü.. — „Finanszü i sztatistika”, Moszkva, 1, 199 p.
- KRIGE, D. G. 1987: Elementary Geostatistical Models Applied in Forecasting South Africa's Long-term Gold Production. — *Mining Engineering*, June 1987. pp. 427–432.
- MAKRIDAKIS, S. & WHEELWRIGHT, S. C. 1978: Interactive Forecasting. — Holden-Day, Inc. San Francisco, Düsseldorf, Johannesburg, London, Panama, Singapore, Sidney, 650 p.
- MECSEKI, A., MOLNÁR, S. & SZABÓ, B. 1986: Gazdasági eredmények előrejelzése logisztikus modellel. — *BKL-Bányászat 1. különszám*, pp. K33–K35.
- MECSEKI, A., MOLNÁR, S. & SZABÓ, B. 1987: Prognozirovanie ekonomicseszkih rezultatov c pomocsju logiszticseszkoj modeli. — *Publications of Hungarian Central Institute for Development of Mining. Year 1987*, 30, pp. 117–120.
- MOLNÁR, S. & FÜST, A. 2002: Környezet-informatikai modellek I. — Szent István Egyetem, Gödöllő, 102 p.
- NOVÁKI, E. (szerk.) 1990: Prognosztizálás, tervezés, modellezés a környezetvédelemben. — Környezetvédelmi és Vízgazdálkodási Minisztérium, Budapest, 344 p.
- TIEN-CHANG LEE 1998: Applied Mathematics in Hydrogeology. — Lewis Publishers, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. 382 p.

Kézirat beérkezett: 2006. 05. 10.