Földtani Közlöny 137/1, 75–81. (2007) Budapest

Fuzzy számokkal végzett ásványvagyon-számítás

Estimation of solid mineral deposit resources, on the base of fuzzy sets theory

FÜST Antal[1]

(3 ábra)

Tárgyszavak: ásványvagyon-számítás, fuzzy elmélet
Keywords: estimation of mineral resources, fuzzy sets theory

Abstract

The study presents one of new methods for estimation of solid mineral deposit resources. This is the resources estimation on the base of fuzzy sets theory. The study deals with the parameter uncertainties, and in the estimation takes into consideration not only the statistical uncertainties, but the technical uncertainties too.

Összefoglalás

A tanulmány az ásványvagyon-számítás egy viszonylag új módszerét, a fuzzy számokkal történő vagyonszámítást ismerteti. A számítási paraméterek fuzzy halmazainak előállítása során részletes áttekintést ad az ásványvagyon-számítási paraméterek bizonytalanságainak figyelembevételi lehetőségéről. A tanulmány az eddigi gyakorlattól eltérően, a statisztikai bizonytalanság mellett a technikai hibákat is figyelembe veszi.

Bevezetés

Az „ásványi nyersanyag a föld felszínén vagy a felszín alatt a földkéregben előforduló olyan természetes eredetű szilárd, légnemű vagy cseppfolyós halmazállapotú ásványok feldúsulása, amelyek közvetlenül vagy feldolgozás után hasznosíthatók." (MGSZ, 2005).

Műszaki szempontból az ásványvagyon kiszámítása lényegében az ásványi nyersanyag mennyiségének és minőségének meghatározását jelenti.

Az „ásványvagyon az ásványi nyersanyagoknak azon része, amelynek mennyiségét, minőségét földtani, és bányaműszaki- és -gazdasági szempontok alapján becsléssel vagy számítással határozzák meg" (Bt, 1993).

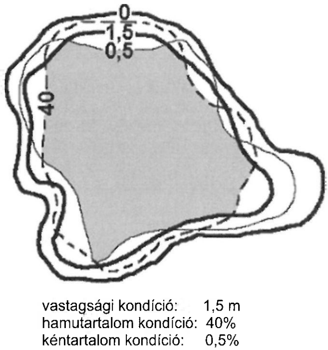
A leggyakrabban használt ásványvagyon-számítási módszerek

Az ásványtelepek alakjától, a települési viszonyoktól, a hasznos és káros komponenstartalom változásának jellegétől, a mintavétel sűrűségétől függően különböző ásványvagyon-számítási módszerek ismeretesek. Mindegyik módszer közös jellemzője, hogy a szabálytalan alakú ásványtestet többé-kevésbé azonos térfogatú, egy-

[1]Eötvös Loránd Tudományegyetem, TTK, Alkalmazott és Környezetföldtani Tanszék, 1117 Budapest Pázmány P. sétány 1/c

szerű testekkel közelíti. A gyakorlatban azokat az ásványvagyon-számítási módszereket célszerű alkalmazni, amelyek a paraméterek grafoanalitikai modellezésére és geostatisztikai értékelésére épülnek (FÜST 2002). Figyelembe veszik a telepparaméterek változékonyságát, a különböző meghatározó jellegű paraméterek közötti sztochasztikus kapcsolatokat, valamint ugyanazon paraméter szomszédos értékei között kimutatható szabályos változást és a paraméterek megbízható térképezhetőségét.

A számításhoz ismerni kell az ásványtelep területét és a mintavételi helyeken mért paraméter-értékeket. A telep területét vagy műszaki határok vagy a vastagsági számbavételi határ jelöli ki. Fontos megjegyezni, hogy a vastagsági számbavételi határ adott minőségi számbavételi határt kielégítő ásványi nyersanyagra vonatkozik. A gyakorlatban ennek alapján történik a lehatárolás. Esetenként a terület a minimális hasznos és/vagy a még megengedhető káros komponens számbavétteli feltételeket kielégítő határvonalával, és a vastagsági számbavételi feltételek (kondíciók) eredőjeként határozható meg (*1. ábra*)



1.. ábra. Példa az ásványlelőhely lehatárolására

Fig. 1. Example for the border lines of a mineral deposit (vastagsági kondíció – thickness cut-off, hamutartalom kondíció – ash content cut-off, kéntartalom kondíció – sulphur cut-off)

A hagyományos, a paraméterek átlagértékein alapuló ásványvagyon-számítási módszerek, a jelenlegi gyakorlat szerinti alkalmazásban feltételezik, hogy az alapvető telepparaméterek (vastagság, térfogatsűrűség, terület) egymástól függetlenek ZAMBÓ 1965; FÜST 1987, 1997; WELMER 1989; GOCHT et al. 1988) A valóságban azonban a paraméterek között, a geológiai keletkezési körülményekből adódóan kisebb-nagyobb mérvű sztochasztikus kapcsolat mutatható ki, amely a paraméterek közötti kovariancia (COV) értékével mérhető (FÜST & ZERGI 1981). Ha a kovariancia nem nulla, akkor nem beszélhetünk a változók függetlenségéről.

Az egységnyi területre eső ásványvagyon mennyiségét $[M(q)_f]$ egymástól független változók esetén általánosságban az $M(q)f = M(m) \cdot M(\gamma)$ szorzat adja, ahol $M(m)$ – a telepvastagság-, $M(\gamma)$ – a térfogatsűrűség várható értéke. Amennyiben m, és γ nem függetlenek egymástól, úgy a $q_{nf} = m \cdot \gamma$ szorzat várható értékét az $M(q)_{nf} = M(m) \cdot M(\gamma) + COV(mq) = M(mq)$ összefüggéssel kell számolnunk.

Az elmondottak alapján a leggyakrabban használatos ásványvagyon-számítási módszerek a következők (FÜST 1997, 2002): számtani középarányos módszer, földtani- és a művelési tömbök módszere, háromszög- és négyszög módszer, sokszög módszer, izovonalas módszer, függőleges és vízszintes metszetek módszere, krigelés, fuzzy halmazok módszere. A következőkben csak a fuzzy halmazokkal végzett ásványvagyon számítással foglalkozunk.

A számított ásványvagyon szórása

A számított ásványvagyon szórásának meghatározásakor mindig különbséget kell tenni az egy helyen mért paraméter többszöri (ismételt) megméréséből adódó átlagértéke (pl. előkészített, homogenizált fúrómagminta többszöri vegyelemzése) és egy paraméter több helyen mért adataiból (pl. fúrásonkénti nyersanyag-vastagságok) számított átlagértéke között. Az első esetben egy paraméter technikai (mérési) hibákkal terhelt halmazáról, a másodikban egy paraméter több helyen mért értékeinek halmazáról van szó.

Egy paraméter átlagértékének szórása tehát két részből tevődik össze:

$$\sigma_{\bar{x}} = t\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$$

Az összefüggésben:

$\sigma_{\bar{x}_1}$ – a paraméter technikai (mérési) jellegű szórása: $\sigma_{\bar{x}_1} = \dfrac{\mu_x}{\sqrt{n}}$

ahol μ_x - a paraméter egy helyen mért értékének technikai hibája.

$\sigma_{\bar{x}_2}$ – a paraméter n helyen mért értékeiből számított véletlen jellegű reprezentatív átlag szórása:

$$\sigma_{\bar{x}_2} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n}}$$

ahol r – a paraméter felületet kiegyenlítő egyenes, sík vagy felület korrelációs együtthatója;
t – a valószínűségi tényező, 95%-os valószínűségi szinten számolva, t=2.
σv – a paraméter véletlen változékonyságából eredő szórása
σ – a szabályos és véletlen változékonyságegyüttes hatását tükröző egyes megfigyelések szórása

Természetesen az x paraméter több paraméterből is leszármaztatható. Például az egységnyi területre eső ásványvagyon, a lineáris ásványvagyon, azaz a helyi telepvastagság és a térfogatsűrűség szorzata: $q = m\gamma$.

Ha valamely p paraméter értékét más – egymástól független – paraméterekből matematikai összefüggésekkel származtatjuk le pl. $p = f(x, y, z, t...)$, akkor a számított paraméter μ_p szórását a hibaterjedés törvénye alapján határozhatjuk meg:

$$\mu_p = t\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2 + \cdots}$$

Az összefüggésben szereplő σ_x σ_y, σ_z, σ_t... szórások szintén két részből, technikai és reprezentatív szórásból tevődnek össze.

Az ásványvagyon számítása fuzzy számokkal

A fuzzy számokkal történő ásványvagyon számítás, egyszerre ad lehetőséget az ásványvagyon mennyiségének és szórásának meghatározására (FÜST 2002). A módszer megértéséhez röviden összefoglaljuk a fuzzy elmélet, vagy más néven a bizonytalan halmazok elméletének legfontosabb alapismereteit.

A fuzzy számok olyan speciális halmazok, amelyek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

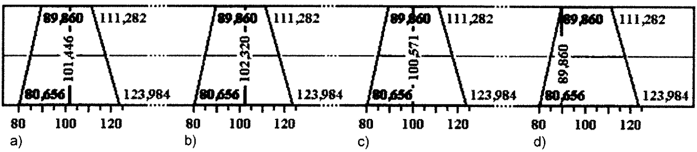
– a halmaznak legalább egy olyan pontja van, amelynek tagságértéke 1:

– a tagságfüggvény az 1 tagságértékig monoton növekvő szakasszal (felszálló ág) kezdődik, ezt követően egy konstans ág következik (ez állhat egyetlen pontból is), majd egy monoton csökkenő szakasszal (leszálló ág) fejeződik be.

A tagságfüggvények különböző alakúak lehetnek. A magyar földtani gyakorlatban a trapéz és a háromszög forma használata terjedt el.

A fuzzy halmazokkal matematikai műveletek végezhetők olymódon, hogy a műveleteket a halmazok sarokpontjaiban végezzük el, és így az eredmény is egy fuzzy halmaz lesz. A fuzzy halmazokkal végzett matematikai műveletek eredményei defuzzyfikálhatók, azaz az eremény visszaállítható konkrét crisp (valós, önmagában biztos) számmá.

A defuzzyfikálás számos módszere ismeretes (FULLÉR 2000). A leggyakrabban használatosak a következők (2. *ábra*)



2. *ábra* A defuzzyfikálás leggyakoribb módszerei és eredményei egy konkrét példában

Fig. 2 The methods and results of defuzzification in an example

A defuzzyfikált érték megegyezik az eredmény halmaz

– függőleges súlyvonalának abszcissza értékével (2. *ábra, a*);

– alap éle felezőpontjának abcissza értékével (2. *ábra, b*);

– maximális tagságfüggvény értékű pontjainak átlagához rendelhető abcissza értékével (2. *ábra, c*);

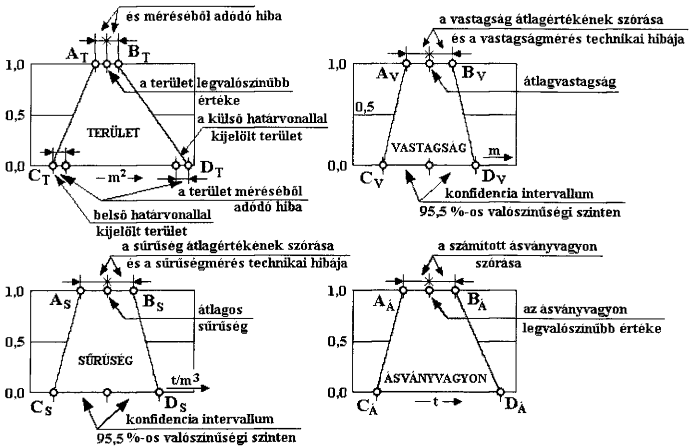
– a maximális tagságfüggvény értékű pontok közül a legkisebb abszcissza értékű abszcissza értékével (2. *ábra, d*).

Példa a fuzzy elmélet alapján végzett ásványvagyon számításra

Amennyiben az ásványvagyon mennyiségét fuzzy számokkal (KÓCZY & TIKK 2000) határozzuk meg, azaz az ásványlelőhely F területét, $\overline{m}$ átlagos vastagságát és γ átlagos térfogatsűrűségét fuzzy számként értelmezzük, az ásványvagyon Q mennyiségét is fuzzy számként kapjuk (BÁRDOSSY et al. 1995, 2000; BÁRDOSSY & FODOR 2000, 2004).

Ez a fuzzy szám azonban egyben a bizonytalanságot is szemlélteti és ezzel együtt, számszerűsíti a számított ásványvagyon szórását. Tekintsük meg a 3. *ábrát*!

Az ábrán az ásványvagyon számításához szükséges paraméterek (a telep területe, átlagos vastagsága és átlagos térfogatsűrűsége) valamint az ásványvagyon fuzzy



3. ábra. Az ásványvagyon-paraméterek és az ásványvagyon fuzzy számként való értelmezése

Fig. 3. Interpretation of the mineral resource parameters and the mineral resource as fuzzy numbers (terület - area, a terület lehatárolásából és méréséből adódó hiba - uncertainty issues from borderline and from measurement of the area, a terület legvalószínűbb értéke – most probable value of area, a belső határvonallal kijelölt terület – area bordered with the internal borderline, a külső határvonallal kijelölt terület – area bordered with the external borderline, a terület méréséből adódó hiba – uncertainty issues from measuring of area, vastagság – thickness, a vastagság átlagértékének szórása és a vastagságmérés technikai hibája – dispersion of thickness mean value, and the technical error of tickness measurement, átlagvastagság - mean value of thickness, konfidencia intervallum 95,5%-os valószínűségi szinten – confidence interval in 95.5% probability level, térfogatsűrűség – bulk density a térfogatsűrűség átlagértékének szórása, a sűrűségmérés technikai hibája – dispersion of bulk density mean value, and the technical error of bulk density measurement, konfidencia intervallum 95.5%-os valószínűségi szinten – confidence interval in 95,5% probability level, ásványvagyon – mineral resource, a számított ásványvagyon szórása – dispersion of calculated mineral resource, az ásványvagyon legvalószínűbb értéke – most probable amount of mineral resource)

számként való értelmezése látható. Vizsgáljuk meg először a telep területét. Ennek minden ásványvagyon számítás esetében három értéke számítható. Ezek: a szélső produktív fúrásokat összekötő, ún. belső határvonallal határolt terület (C_T), a produktív fúrásokhoz legközelebbi meddő fúrások összekötő vonala (külső határvonal) által határolt terület (D_T), valamint a telep legvalószínűbb területe (F), melyet többféle módszerrel lehet meghatározni. Amennyiben eltekintünk F meghatározási és mérési hibájától, akkor a terület mint fuzzy szám magját egyetlen pont, egy F értékű pont alkotja. A terület mint fuzzy szám talpát ugyanakkor a C_T és D_T értékű pontok jelölik ki, azaz a területet egy (többnyire nem egyenlő szárú) háromszög alakú fuzzy szám írja le. Célszerű azonban figyelembe venni, hogy F esetében mindenképpen jelentkezik egy terület-meghatározási hiba, melynek nagysága attól függ, hogy a területet határoló vonalát milyen módszerrel szerkesztettük meg. Amennyiben a határoló vonalat a szélső produktív és meddő fúrások összekötő vonalának felezőpontjain átmenő vonal jelöli ki, akkor a hiba nagysága a $dF_2 \approx 1/6a{\cdot}b\sqrt{n_b}$ tapasztalati összefüggéssel számítható, ahol a és b a fúrási hálózat oldalhossza a kiélelődés mentén, n_b pedig az ennek megszerkesztéséhez felhasznált produktív fúrások száma (db). Ha a telep F területét nem a vonalat alkotó pontok koordinátáiból számítjuk, hanem valamilyen más módszerrel mérjük, akkor figyelembe kell vennünk egy terület mérési hibát is, melynek nagysága például planimetrálás és szokványos készletszámítási térkép méretarányok mellett, a $dF_1 \approx 1/300F$ tapasztalati összefüggéssel számítható.A két hibarész összege:

$$dF = \left[(dF_1)^2 + (dF_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Az $\boldsymbol{A}_T = F - dF$, $\boldsymbol{B}_T = F + dF$ pontok a terület mint fuzzy szám magjában egy intervallumot jelölnek ki. A fuzzy szám talpa (tartója) egy olyan intervallum, amelynek egyik végpontja – amennyiben a területeket a fúrások koordinátáiból számítjuk és eltekintünk a koordináták hibájától – C_T, a másik $\boldsymbol{D}_T$. Ha a területeket mérjük és a mért értékek C'_T és $\boldsymbol{D}'_T$, akkor $C_T = C'_T - dF_1$; $\boldsymbol{D}_T = \boldsymbol{D}'_T + dF_1$. A terület mint fuzzy szám tehát egy (többnyire nem egyenlőszárú) trapéz.

A telep vastagságát és térfogatsűrűségét egyaránt trapéz alakú fuzzy számok reprezentálják. Ezeknél a magot az átlagérték szórásából és a mérés technikai hibájából képzett hibatényező jelöli ki. A fuzzy szám talpát hasonló módon, de 95,5%-os valószínűségi szinten meghatározott konfidencia intervallum jelöli ki. A telepvastagság esetében rendelkezünk a ferdeség ismeretében becsült $\bar{m}$ átlagértékkel, valamint ennek reprezentatív (átlagérték) szórásával $\sigma_{\bar{m}_1}$, továbbá a vastagságmérés egy fúrásra vonatkoztatott μ_m hibájával, melyből:

$$\sigma_{\bar{m}_2} = \frac{\mu_m}{\sqrt{n}}$$

A két hibarész gyökjel alatt összegeződik, így: $\sigma_{\bar{m}} = \sqrt{\left(\sigma_{\bar{m}_1}\right)^2 + \left(\sigma_{\bar{m}_2}\right)^2}$

A vastagság mint fuzzy szám magjának, valamint talpának sarokpontjait a következő összefüggésekkel jelöljük ki:

$A_V = \bar{m} - \sigma_{\bar{m}}$; $B_V = \bar{m} + \sigma_{\bar{m}}$; $C_V = \bar{m} - 2\sigma_{\bar{m}}$; $D_V = \bar{m} + 2\sigma_{\bar{m}}$.

Hasonló meggondolásokkal, mint előbb, a térfogatsűrűség esetében: $A_S = \bar{\gamma} - \sigma_{\bar{\gamma}}$; $\boldsymbol{B}_S = \bar{\gamma} + \sigma_{\bar{\gamma}}$; $C_S = \bar{\gamma} - 2\sigma_{\bar{\gamma}}$; $D_S = \bar{\gamma} + 2\,\sigma_{\bar{\gamma}}$.

Az $\boldsymbol{A}_Á = \boldsymbol{A}_T \cdot \boldsymbol{A}_V \cdot \boldsymbol{A}_S$; $\boldsymbol{B}_Á = \boldsymbol{B}_T \cdot \boldsymbol{B}_V \cdot \boldsymbol{B}_S$; $C_Á = C_T \cdot C_V \cdot C_S$; $\boldsymbol{D}_Á = \boldsymbol{D}_T \cdot \boldsymbol{D}_V \cdot \boldsymbol{D}_S$ egyenletek az ásványvagyon mint trapéz alakú fuzzy szám sarokpontjait adják. $C_Á$ és $\boldsymbol{D}_Á$ értéke azt fejezi ki, hogy 95,5%-os valószínűségi szinten a legkedvezőtlenebb esetben sem lehet az ásványvagyon $C_Á$-nál kisebb és $\boldsymbol{D}_Á$-nál nagyobb, azaz az eseteknek csak 4,5%-ában fordulhat elő, hogy az ásványvagyon kisebb mint $C_Á$ vagy nagyobb mint $\boldsymbol{D}_Á$. A leginkább valószínű vagyon intervallumát maga a mag adja, amely $\boldsymbol{A}_Á$-tól $\boldsymbol{B}_Á$-ig terjed. Ezen a szakaszon minden egyes értéknek azonos a bekövetkezési valószínűsége. Az eredményül kapott fuzzy szám a defuzzyfikációs módszerek valamelyikével hagyományos eredménnyé alakítható.

A szórás meghatározásához tekintsük meg újra a 3. *ábrát*. A területet, a vastagságot és a sűrűséget jellemző fuzzy számokat összeszorozva, az ásványvagyont reprezentáló fuzzy számot kapjuk. Az 1 tagság értékű $\boldsymbol{A}_Á - \boldsymbol{B}_Á$ szakaszon lévő számok mindegyike azonos bekövetkezési valószínűséggel rendelkezik. Ezen a tartományon belül az adott kutatási adatok birtokában nem lehet kitüntetett vagyonértéket felvenni.

Irodalom – References

BÁRDOSSY, Gy. & FODOR, J. 2000: Handling uncertainty in geology by new mathematical methods. Budapest Politechnic Hungarian Fuzzy Association. – Proceedings of the International Symposium of Hunbgarian Researchers Compotational Intelligence, 93–109.

BÁRDOSSY, Gy. & FODOR, J. 2004: Evaluation of Uncertainties and Risk in Geology. – Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo, 221 p.

BÁRDOSSY Gy., FODOR J., MOLNÁR P. & TUNGLI Gy. 2000: A bizonytalanság értékelése a földtanban. – *Földtani Közlöny* **130/2**, 291–322.

BÁRDOSSY Gy, R. SZABÓ I. & VARGA G. 1995: Az ásványvagyon értékelés új módszerei. – *Földtani Kutatás* **38/3**, 35–44.

Bt., 1993: Az 1993. évi XLVIII. törvény a bányászatról.

FULLÉR, R. 2000: Introduction to Neuro-Fuzzy Systems. – Physica-Verlag, Heidelberg, New York, 289 p.

FÜST A., 1987: Geostatisztikai összefoglaló. – (Mérnöktovábbképző tanfolyam jegyzete), Országos Érc és Ásványbányák sokszorosítása, Budapest, 186 p.

FÜST A. 1997: Geostatisztika. – Eötvös Kiadó, Budapest, 427 p.

FÜST A. 2002: Természeti folyamatok geostatisztikai modellezése, különös tekintettel az ásványlelőhelyek kutatására és értékelésére. – Akadémiai doktori értekezés, Budapest, 117 p.

FÜST A. & ZERGI I. 1981: Az ásványvagyon mennyiségének és szórásának meghatározása függő változók esetén. – *BKL-Bányászat* **114/3**, 173–176.

GOCHT, W. R., ZANTOP, H. & EGGERT, R.G. 1988: International Mineral Economics. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 271 p.

KÓCZY T. L. & TIKK D. 2000: Fuzzy rendszerek. – Typotex Kiadó, Budapest 209 p.

MGSZ, 2005: Magyarország Ásványi Nyersanyagvagyona, 296 p.

WELLMER, F. W. 1989: Economic Evaluation in Exploration. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, 150 p.

ZAMBÓ, J. 1965.: Bányaművelés. Feltárás és fejtés. – Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 450 p.

Kézirat beérkezett: 2006. 05. 10.